МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ МОСКОВСКОЙ ОБЛАСТИ
ПЕДАГОГИЧЕСКАЯ АКАДЕМИЯ
ПОСЛЕВУЗОВСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ

ИТОГОВАЯ РАБОТА

на тему: Методика использования информационных технологий при обучении математике. Математическое моделирование

Выполнила Яковлева Л.В.

Москва
2011г.

Введение.

Большое значение для модернизации современного образования занимает активизация творческой познавательной деятельности учащихся.

Моделирование - важный метод научного познания и сильное средство активизации учащихся в обучении.

Вопросы моделирования рассматривались в работах В. А. Штофа, И. Б. Новикова, Н. А. Уемова и других, специалистов по педагогике и психологии Л. М. Фридмана, В. В. Давыдова, Б. А. Глинского, С. И. Архангельского и других.

Термин «модель» широко используется в различных сферах человеческой деятельности и имеет множество смысловых значений. Моделируемый объект называется оригиналом, моделирующий - моделью.

Понятие «модель» возникло в процессе опытного изучения мира, а само слово «модель» произошло от латинских слов «modus», «modulus», означающих меру, образ, способ. Почти во всех европейских языках оно употреблялось для обозначения образа или прообраза, или вещи, сходной в каком-то отношении с другой вещью.

Современный ученик должен иметь современное представление о предмете математика. В основе содержания школьных учебников должно быть предусмотрено создание и разработка схем, моделей и их вариантов, создание моделей по известным схемам, приложение уже разработанных схем непосредственно в обучении. Для того, чтобы достичь основной цели в обучении математики - формирование умений строить математические модели простейших реальных явлений – надо приобщить учащихся к опыту творческой деятельности и сформировать у них умения применять его. Такие умения должны начинать формироваться не только в 8-11 классах, а намного раньше. Самое главное, чтобы использовались сюжетные задачи, описывающие реальную или приближенную к реальной ситуацию, но не на чистом математическом языке. Это будет способствовать развитию определенных сторон мышления.

С учетом вышеизложенного для исследования была выбрана тема: «Математическое моделирование в школьном курсе математики».

Объект исследования – процесс обучения математики в школе.

Предмет исследования – обучение учащихся элементам математического моделирования.

Цель работы – разработать методику изучения элементов математического моделирования на уроках математики в 5-6 классах.

Изучение математического моделирования на ранних этапах обучения делает сам процесс обучения более эффективным и осмысленным, а также способствует формированию у школьников диалектико-материалистического мировоззрения, умения проводить рациональные рассуждения.

Цель исследования ставит перед нами следующие задачи:

1) определить основные функции и цели обучения математическому моделированию в школе;

2) обосновать роль изучения элементов математического моделирования в школьном курсе математики;

3) описать методику обучения школьников элементам математического моделирования;

4) проанализировать учебники математики с точки зрения наличия элементов математического моделирования;

5) экспериментально проверить основные положения исследования.

Для достижения целей работы и решения поставленных задач были использованы следующие методы:

- ✓ изучение литературы по математике и методике преподавания математики по исследуемой теме;
- ✓ изучение психологической, педагогической, философской литературы по теме исследования;
- ✓ наблюдение за работой учащихся;
- ✓ опытное преподавание.

Работа состоит из введения, двух глав, заключения, библиографического списка и приложений.

В первой главе рассматриваются различные подходы к определению понятия модели и её классификация, также рассматривается роль и место математического моделирования в школе.

Во второй главе дается анализ некоторых комплектов учебников и рассматривается методика изучения математических моделей в школе.

После каждой главы есть вывод.

Приложения содержат некоторые разработки уроков-кружков в школе.

Глава 1. Теоретические основы математического моделирования

1.1. Понятие модели. Моделирование. Классификация моделей и виды моделирования

Моделирование в наше время получило необычайно широкое применение во многих областях знаний: от философских и других гуманитарных разделов знаний до ядерной физики и других разделов физики, от проблем радиотехники и электротехники до проблем механики и гидромеханики, физиологии и биологии и т. д. Моделирование - главный способ познания окружающего мира.

Существуют различные точки зрения на определение понятия «модель».

Так, например, В. А. Штоф под моделью понимает такую мысленно представляемую или материально реализованную систему, которая отображает и воспроизводит объект так, что ее изучение дает новую информацию об этом объекте.

А. И. Уемов определяет модель как систему, исследование которой служит средством для получения информации о другой системе.

Чарльз Лейв и Джеймс Марч дают такое определение модели: «Модель – это упрощенная картина реального мира. Она обладает некоторыми, но не всеми свойствами реального мира. Она представляет собой множество взаимосвязанных предположений о мире. Модель проще тех явлений, которые она по замыслу отображает или объясняет».

В. А. Поляков считает, что «модель – это идеальное формализованное представление системы и динамики ее поэтапного формирования. Модель должна интегрировано имитировать реальные задачи и ситуации, быть компактной, адекватно передавать смены состояний и должна совпадать с рассматриваемой задачей или ситуацией».

Большинство психологов под «моделью» понимают систему объектов или знаков, воспроизводящую некоторые существенные свойства системы-оригинала. Наличие отношения частичного подобия («гомоморфизм») позволяет использовать модель в качестве заместителя или представителя изучаемой системы.

Иногда под моделью понимают такой материальный или мысленно представляемый объект, который в процессе познания (изучения) замещает объект-оригинал, сохраняя некоторые важные для данного исследования типичные черты.

Вот некоторые примеры моделей:

1) Архитектор готовится построить здание невиданного доселе типа. Но прежде чем воздвигнуть его, он сооружает это здание из кубиков на столе, чтобы посмотреть, как оно будет выглядеть. Это модель.

2) На стене висит картина, изображающая бушующее море. Это модель.

«Моделирование - это опосредованное практическое или теоретическое исследование объекта, при котором непосредственно изучается не сам интересующий нас объект, а некоторая вспомогательная искусственная или естественная система:

1) находящаяся в некотором объективном соответствии с познаваемым объектом;

2) способная замещать его в определенных отношениях;

3) дающая при ее исследовании, в конечном счете, информацию о самом моделируемом объекте»

(три перечисленных признака по сути являются определяющими признаками модели) .

На основании перечисленного можем выделить следующие цели моделирования [3]:

1) **понимание** устройства конкретной системы, ее структуры, свойств, законов развития и взаимодействия с окружающим миром;

2) **управление** системой, определение наилучших способов управления при заданных целях и критериях;

3) **прогнозирование** прямых и косвенных последствий реализации заданных способов и форм воздействия на систему.

Все три цели подразумевают в той или иной степени наличия механизма обратной связи, то есть необходима возможность не только переноса элементов, свойств и отношений моделируемой системы на моделирующую, но и наоборот.

Моделирование тесно связано с такими категориями, как абстракция, аналогия, гипотеза и др. Процесс моделирования обязательно включает и построение абстракций, и умозаключения по аналогии, и конструирование научных гипотез.

Научной основой моделирования служит теория аналогии, в которой основным понятием является - понятие аналогии - сходство объектов по их качественным и количественным признакам. Все эти виды объединяются понятием обобщенной аналогии - абстракцией. Аналогия выражает особого рода соответствие между сопоставляемыми объектами, между моделью и оригиналом.

Вообще, аналогия это среднее, опосредующее звено между моделью и объектом. Функция такого звена заключается:

а) в сопоставлении различных объектов, обнаружении и анализе объективного сходства определенных свойств, отношений, присущих этим объектам;

б) в операциях рассуждения и выводах по аналогии, то есть в умозаключениях по аналогии.

Хотя в литературе отмечается неразрывная связь модели с аналогией, но «аналогия не есть модель». Неопределенности порождаются нечетким различием:

а) аналогии как понятия выражающего фактическое отношение сходства между разными вещами, процессами, ситуациями, проблемами;

б) аналогии как особой логики умозаключения;

в) аналогии как эвристического метода познания;

г) аналогии как способа восприятия и осмысления информации;

д) аналогии как средства переноса апробированных методов и идей из одной отрасли знания в другую, как средства построения и развития научной теории.

Вывод по аналогии включает интерпретацию информации, полученной исследованием модели. Особенность способа получения выводов по аналогии в логической литературе получила название **традукция** - перенос отношений (свойств, функций и т. д.) от одних предметов на другие. Традуктивный способ рассуждений используется при сопоставлении различных предметов по количеству, качеству, пространственному положению, временной характеристике, поведению, функциональным параметрам структуры и т. д.

Моделирование является многофункциональным, то есть оно используется самым различным образом для различных целей на различных уровнях (этапах) исследования или преобразования. В связи с этим многовековая практика использования моделей породила обилие форм и типов моделей.

Модели классифицируют исходя из наиболее существенных признаков объектов. В литературе, посвященной философским аспектам моделирования, представлены различные классификационные признаки, по которым выделены различные типы моделей. Рассмотрим некоторые из них.

В. А. Штоф предлагает следующую классификацию моделей :

1) по способу их построения (форма модели);

2) по качественной специфике (содержание модели).

По способу построения различают ***материальные*** и ***идеальные*** модели. Материальные модели, несмотря на то, что эти модели созданы человеком, существуют объективно. Их назначение специфическое – воспроизведение структуры, характера, протекания, сущности изучаемого процесса – отразить пространственные свойства – отразить динамику изучаемых процессов, зависимости и связи.

В свою очередь материальные модели по форме делятся на:

- ***образные*** (построенные из чувственно наглядных элементов);
- ***знаковые*** (в этих моделях элементы отношения и свойства моделируемых явлений выражены при помощи определенных знаков);
- ***смешанные*** (сочетающие свойства и образных, и знаковых моделей).

Достоинства данной классификации в том, что она дает хорошую основу для анализа двух основных функций модели:

- практической (в качестве орудия и средства научного эксперимента);

- теоретической (в качестве специфического образа действительности, в котором содержатся элементы логического и чувственного, абстрактного и конкретного, общего и единичного).

Другая классификация есть у Б. А. Глинского в его книге «Моделирование как метод научного исследования». Наряду с обычным делением моделей по способу их реализации, он разделяет модели и по характеру воспроизведения сторон оригинала на:

- ***субстанциональные***;
- ***структурные***;
- ***функциональные***;
- ***смешанные***.

Рассмотрим еще одну классификацию, предлагаемую Л. М. Фридманом. С точки зрения степени наглядности он все модели разбивает на два класса:

- ***материальные*** (вещественные, реальные);
- ***идеальные.***

К материальным моделям относят такие, которые построены из каких-либо вещественных предметов, из металла, дерева, стекла и других материалов. К ним также относят и живые существа, используемые для изучения некоторых явлений или процессов. Все эти модели могут быть непосредственно чувственно познаны, ибо они существуют реально, объективно. Они представляют собой вещественный продукт человеческой деятельности.

Материальные модели, в свою очередь, можно разделить на ***статические (неподвижные)*** и ***динамические (действующие)***.

К первому виду автор классификации относит модели, геометрически подобные оригиналам. Эти модели передают лишь пространственные (геометрические) особенности оригиналов в определенном масштабе (например, макеты домов, застройки городов или сел, разного рода муляжи, модели геометрических фигур и тел, изготовленные из дерева, проволоки, стекла, пространственные модели молекул и кристаллов в химии, модели самолетов, кораблей и других машин и т. д.).

К динамическим (действующим) моделям относят такие, которые воспроизводят какие-то процессы, явления, Они могут быть физически подобны оригиналам и воспроизводить моделируемые явления в каком-то масштабе. Например, для расчета проектируемой гидроэлектростанции строят действующую модель реки и будущей плотины; модель будущего корабля позволяет в обычной ванне изучить некоторые аспекты поведения проектируемого корабля в море или на реке и т. д.

Следующим видом действующих моделей являются всякого рода ***аналоговые и имитирующие***, которые воспроизводят то или иное явление с помощью другого, в каком-то смысле более удобного. Таковы, например, электрические модели разного рода механических, тепловых, биологических и прочих явлений. Другим примером может быть модель почки, которую широко используют в медицинской практике. Эта модель — искусственная почка — функционирует одинаково с естественной (живой) почкой, выводя из организма шлаки и другие продукты обмена, но, конечно, устроена она совершенно иначе, чем живая почка.

Идеальные модели делят обычно на три вида:

- ***образные*** (иконические);
- ***знаковые*** (знаково-символические);
- ***мысленные*** (умственные).

К образным, или иконическим (картинным), моделям относят разного рода рисунки, чертежи, схемы, передающие в образной форме структуру или другие особенности моделируемых предметов или явлений. К этому же виду идеальных моделей следует отнести географические карты, планы, структурные формулы в химии, модель атома в физике и т. д.

Знаково-символические модели представляют собой запись структуры или некоторых особенностей моделируемых объектов с помощью знаков-символов какого-то искусственного языка. Примерами таких моделей являются математические уравнения, химические формулы.

Наконец, мысленные (умственные, воображаемые) модели — представления о каком-либо явлении, процессе или предмете, выражающие теоретическую схему моделируемого объекта. Мысленной моделью является любое научное представление о каком-либо явлении в форме его описания на естественном языке.

Как видим, понятие модели в науке и технике имеет множество различных значений, среди ученых нет единой точки зрения на классификацию моделей, в связи с этим невозможно однозначно классифицировать и виды моделирования. Классификацию можно проводить по различным основаниям:

1) по характеру моделей (то есть по средствам моделирования);
2) по характеру моделируемых объектов;
3) по сферам приложения моделирования (моделирование в технике, в физических науках, в химии, моделирование процессов живого, моделирование психики и т. п.)
4) по уровням («глубине») моделирования, начиная, например, с выделения в физике моделирования на микроуровне.

Наиболее известной является классификация по характеру моделей. Согласно ей различают следующие виды моделирования [27]:

1. Предметное моделирование, при котором модель воспроизводит геометрические, физические, динамические или функциональные характеристики объекта. Например, модель моста, плотины, модель крыла самолета и т.д.

2. Аналоговое моделирование, при котором модель и оригинал описываются единым математическим соотношением. Примером могут служить электрические модели, используемые для изучения механических, гидродинамических и акустических явлений.

3. Знаковое моделирование, при котором моделями служат знаковые

образования какого-либо вида: схемы, графики, чертежи, формулы, графы, слова и предложения в некотором алфавите (естественного или искусственного языка)

4. Со знаковым тесно связано мысленное моделирование, при котором модели приобретают мысленно наглядный характер. Примером может в данном случае служить модель атома, предложенная в свое время Бором.

5. Наконец, особым видом моделирования является включение в эксперимент не самого объекта, а его модели, в силу чего последний приобретает характер модельного эксперимента. Этот вид моделирования свидетельствует о том, что нет жесткой грани между методами эмпирического и теоретического познания.

1.2. Математическая модель. Математическое моделирование

Математическое моделирование — частный случай моделирования. Является важнейшим видом знакового моделирования и осуществляется средствами языка математики. Знаковые образования и их элементы всегда рассматриваются вместе с определенными преобразованиями, операциями над ними, которые выполняет человек или машина (преобразования математических, логических, химических формул и т. п.).

Понятия «математическая модель» и «моделирование» широко используются в науке и на производстве. Роль знаковых моделей особенно возросла с расширением масштабов применения ЭВМ при построении знаковых моделей. Современная форма «материальной реализации» знакового (прежде всего, математического) моделирования - это моделирование на цифровых электронных вычислительных машинах, универсальных и специализированных.

Математическое моделирование предполагает использование в качестве специфического средства исследования оригинала его математическую модель, изучение которой дает новую информацию об объекте познания, его закономерностях (Н.П. Бусленко, Б. А. Глинский, Б.В. Гнеденко, Л.Д. Кудрявцев, И.Б. Новик, Г.И. Рузавин, К.А. Рыбников, В.А. Штофф). Предметом исследования при математическом моделировании является система «оригинал – математическая модель», где системообразующей связью выступает изоморфизм структур оригинала и модели. Структура служит инвариантным аспектом системы, раскрывающим механизм ее функционирования (Н.Ф. Овчинников).

Известно, что для математического исследования процессов и явлений, реально происходящих в действительности, надо суметь описать их на языке математики, то есть построить математическую модель процесса, явления. Математические модели и являются объектами непосредственного математического исследования.

Математической моделью называют описание какого-либо реального процесса или некоторой исследуемой ситуации на языке математических понятий, формул и отношений.

Математическая модель – это упрощенный вариант действительности, используемый для изучения ее ключевых свойств. Математическая модель, основанная на некотором упрощении, идеализации, не тождественна объекту, а является его приближенным отражением. Однако благодаря замене реального объекта соответствующей ему моделью появляется возможность сформулировать задачу его изучения как математическую и воспользоваться для анализа универсальным математическим аппаратом, который не зависит от конкретной природы объекта.

Математической моделью, с формальной точки зрения, можно назвать любую совокупность элементов и связывающих их операций. С содержательной точки зрения интересны модели, являющиеся изоморфным отображением реальных или реализуемых объектов, процессов и явлений.

С математическими моделями тесно связан математический метод познания отображаемых моделью объектов – метод математического моделирования.

Соотношение между элементами a, b и c, выражаемое формулой $a+b=c$, - это математическая модель. Она изоморфно отображает операцию объединения двух «куч камней» с их числами a и b в общую «кучу камней», которых окажется $c=a+b$. В этом смысле операция сложения изоморфна этому слиянию.

Этот пример поясняет общий математический метод познания. Он состоит в построении для объекта, процесса или явления изоморфной математической модели, изучении этой математической модели и переносе в силу изоморфизма результатов, полученных для модели, на исходный объект. Другими словами, метод математического моделирования заключается в том, что для исследования какого-либо объекта выбирают или строят другой объект, в каком-то отношении подобный исследуемому. Построенный или выбранный объект изучают и с его помощью решают исследуемые задачи, а затем результаты решения этих задач переносят на первоначальное явление или объект.

Математическое моделирование – приближенное описание какого-либо класса явлений внешнего мира, выраженное с помощью математической символики. Это мощный метод познания внешнего мира, а также прогнозирования и управления.

Математическое моделирование расширяет творческие возможности специалиста в решении целого ряда профессиональных задач, существенно изменяет его профессиональную подвижность. Современному специалисту следует «хорошо знать» математику, то есть не просто уметь использовать ее для различных расчетно-вычислительных операций, а понимать математические методы исследования и их возможности. Только понимание сущности математического моделирования позволяет адекватно использовать этот метод в профессиональной деятельности.

1.3. Математическое моделирование в школе

Развитие у учащихся правильных представлений о природе математики и отражении математической наукой явлений и процессов реального мира является программным требованием к обучению математике. Доминирующим средством реализации этой программной цели является метод математического моделирования.

Этот метод имеет своей основой моделирование (математическое и предметное). Применительно к обучению математике воспользуемся определением моделирования, которое предлагает И. Г. Обойщикова, и будем понимать под *моделированием* обобщенное интеллектуальное умение учащихся, состоящее в замене математических объектов, их отношений, способов деятельности моделями в виде изображений отрезками, числовыми лучами, схемами, значками.

Для моделирования привлекаются различные математические объекты: числовые формулы, числовые таблицы, буквенные формулы, функции, уравнения алгебраические или дифференциальные и их системы, неравенства, системы неравенств (а также неравенств и уравнений), ряды, геометрические фигуры, разнообразные графосхемы, диаграммы Венна, графы.

Математическое моделирование находит применение при решении многих сюжетных задач. Уже уравнение, составленное по условию задачи, является ее алгебраической моделью. Моделированию, особенно алгебраическому и аналитическому, следует уделить в школе должное внимание, так как математические модели используются для решения (или хотя бы облегчения решения) сюжетных задач. Кроме того, при построении модели используется такие операции мышления, как анализ через синтез, сравнение, классификация, обобщение, которые являются операциями мышления, и способствует его развитию. Составление математической модели задачи, перевод задачи на язык математики исподволь готовит учащихся к моделированию реальных процессов и явлений в их будущей деятельности.

При решении сюжетных задач особенно часто используются их алгебраические и аналитические модели. Такой моделью может быть функция, описывающая явление или процесс, уравнение, система уравнений, неравенство, система неравенств, система уравнений и неравенств и др. При составлении модели задача, таким образом, переводится на язык алгебры или математического анализа.

Рассмотрим несколько примеров математических моделей.

Задача 1. Турист проехал 2200 км, причем на теплоходе проехал вдвое больше, чем на автомобиле, а на поезде в 4 раза больше, чем на теплоходе. Сколько километров проехал турист отдельно на каждом виде транспорта?

Решение. Примем расстояние, которое проехал турист на автомобиле за x км. Известно, что на теплоходе проехал вдвое больше, чем на автомобиле, то есть $2x$ км. На поезде проехал в 4 раза больше, чем на теплоходе, то есть $4 \cdot 2x$.

Весь путь – это сумма расстояний, которые проехал турист на каждом из видов транспорта и он равен 2200 км. Получим следующее уравнение:

$x+2x+8x=2200$ - это и есть математическая модель данной задачи.

Задача 2. На школьной математической олимпиаде было предложено решить 6 задач. За каждую решенную задачу засчитывалось 10 очков, а за нерешенную снималось 3 очка. В следующий тур выходили ученики, набравшие не менее 30 очков. Сколько задач нужно было решить, чтобы попасть в следующий тур олимпиады?

Решение. Пусть ученик должен решить x задач. Тогда за решенные задачи он получит $10x$ очков, а за $6-x$ нерешенных задач у него снимут $3(6-x)$ очков. Ученик может получить $10x-3(6-x)$ очков (все переменные выражены через выбранное x и значения других величин, заданных в задаче). По условию задачи $10x-3(6-x) \geq 30$ и $x \leq 6$.

Моделью задачи служит система неравенств

$$\begin{cases} 10x-3(6-x) \geq 30 \\ x \leq 6 \end{cases}.$$

Далее в качестве примера рассмотрим задачу математического анализа на нахождение экстремума. Надо заметить, что аналитической моделью задачи на наибольшее (наименьшее) значение является функция одного переменного с областью ее задания. Обычно областью задания является замкнутый промежуток.

Задача 3. Кусок проволоки длиной 48 м сгибают так, чтобы образовался прямоугольник. Какую длину должны иметь стороны прямоугольника, чтобы его площадь была наибольшей?

Решение. Требуется найти размеры прямоугольника с наибольшей площадью. Обозначим за a – длину прямоугольника, тогда ширина равна $\frac{48-2a}{2}=24-a$.

$S(a) = a \cdot (24 - a)$. Полученная функция является моделью данной задачи.

Отметим, что в общем случае процесс моделирования состоит из следующих этапов:

1 этап. Постановка задачи и определение свойств оригинала, подлежащих исследованию.

2 этап. Констатация затруднительности или невозможности исследования оригинала.

3 этап. Выбор модели, достаточно хорошо фиксирующей существенные свойства оригинала и легко поддающейся исследованию.

4 этап. Исследование модели в соответствии с поставленной задачей.

5 этап. Перенос результатов исследования модели на оригинал.

6 этап. Проверка этих результатов.

На сегодняшний день наиболее распространенной является трехэтапная схема процесса математического моделирования:

1) перевод предложенной задачи с естественного языка на язык математических терминов, то есть построение математической модели задачи (формализация);

2) решение задачи в рамках математической теории (решение внутри модели);

3) перевод полученного результата (математического решения) на язык, на котором была сформулирована исходная задача (интерпретация полученного решения).

Наиболее ответственным и сложным является первый этап – само построение математической модели. Оно осуществляется логическим путем на основе глубокого анализа изучаемого явления (процесса) и требует умения описать явление (процесс) на языке математики.

В свою очередь, в процессе построения модели можно выделить несколько шагов.

Первый шаг – индуктивный: это отбор наблюдений, относящихся к тому процессу, который предстоит моделировать. Этот этап состоит в формулировке проблемы, то есть в принятии решения относительно того, что следует принимать во внимание, а чем можно пренебречь.

Второй шаг заключается в переходе от определения проблемы к собственно построению неформальной модели. Неформальная модель – это такое описание процесса, которое способно объяснить отобранные нами наблюдения, но при этом определено недостаточно строго, и нельзя с точностью проверить степень логической взаимосвязанности в нем свойств.

На этой стадии рассматриваются целый ряд наборов неформальных допущений, способных объяснить одни и те же данные; тем самым рассматриваются несколько потенциальных моделей и решается, какая из этих моделей лучше всего отображает изучаемый процесс. Иначе говоря, ищутся различные способы установления логического соответствия между моделью и реальным миром.

Третий шаг – это перевод неформальной модели в математическую модель. Такой перевод включает в себя рассмотрение словесного описания неформальной модели и поиск подходящей математической структуры, способной отобразить изучаемые процессы. Это самый сложный этап во всем процессе моделирования. Стадия перевода может таить в себе две опасности. Во-первых, неформальные модели имеют тенденцию быть неоднозначными, и обычно существует несколько способов перевода неформальной модели в математическую (при этом альтернативные математические модели могут иметь совершенно различный смысл). На самом деле это одна из главных причин, изначально толкающих к применению математических моделей: язык математики лишен двусмысленностей и более точен, чем естественный язык, он позволяет исследовать скрытый смысл тончайших различий в формулировках, который плохо доступен исследованию посредством естественного языка.

Следующий этап – этап решения задачи в рамках математической теории – можно еще назвать этапом математической обработки формальной модели. Он является решающим в математическом моделировании. Именно здесь применяется весь арсенал математических методов – логических, алгебраических, геометрических и т. д. – для формального вывода нетривиальных следствий из исходных допущений модели. На стадии математической обработки обычно – вне зависимости от сути задачи – имеют дело с чистыми абстракциями и используют одинаковые математические средства. Этот этап представляет собой дедуктивное ядро моделирования.

На последнем этапе моделирования полученные выводы проходят через еще один процесс перевода – на сей раз с языка математики обратно на естественный язык.

Учителю следует добиться от учащихся четкого понимания значения и содержания каждого из выше описанных этапов процесса математического моделирования. Это нужно для того, чтобы школьники усвоили, что они решают не просто математическую задачу, а конкретную жизненную ситуацию математическими методами. Тогда учащиеся смогут увидеть в математике практическое значение, и не будут воспринимать ее как абстрактную науку.

Метод математического моделирования является мощным инструментом для исследования различных процессов и систем. Приложения этого метода к решению конкретных задач изложены в ряде известных монографий и учебных пособий. Вместе с тем, многие из них предполагают достаточно высокий уровень математической подготовки учеников, что зачастую вызывает определенные трудности при изучении материала. Понятие математической модели и некоторые общие положения, связанные с ним, должны в той или иной форме иллюстрироваться на протяжении всего курса математики, а разделы школьной программы, посвященные задачам на работу, движение, проценты, прогрессии и, наконец, задачам на применение производных и интегралов, могут рассматриваться как введение в метод математического моделирования.

1.4. Цели и функции обучения математическому моделированию в школе

Некоторые авторы считают, что в условиях развивающего обучения формирование у учащихся приемов интеллектуальной деятельности является одной из центральных задач (А. К. Артемов, В. В. Давыдов, И. С. Якиманская и другие), ее существенным приемом является моделирование.

Модели упрощают восприятие учащимися какой-либо ситуации и обеспечивают целостность восприятия, развивают компоненты абстрактного мышления (анализ, сравнение, обобщение, абстрагирование и др.), совершенствуют логическое мышление и помогают глубже усвоить учебный материал, так как позволяют изучать свойства объекта в «чистом» виде.

Необходимость овладения математическим моделированием как особым действием диктуется психолого-педагогическими соображениями. Изучение процесса обучения привело к разработке психологической теории учения. Теория поэтапного формирования умственных действий, разработанная отечественным психологом П. Я. Гальпериным и его сотрудниками, исходит из положения, что процесс обучения – это процесс овладения системой умственных действий. При этом овладение умственным действием происходит в процессе интериоризации (перехода вовнутрь) соответствующего внешнего практического действия.

Математическое моделирование служит особым видом образно-знаковой идеализации и построения научной предметности. Моделирование позволяет видеть предмет как объект исследования, определять действия с ним задолго до того, как будет получен конечный результат. А это означает, что с самого первого момента конструирования создается образ, который позволит ориентироваться в предмете и анализировать его, служит средством продвижения в содержании.

Согласно теории поэтапного формирования умственных действий построение и работа с моделями составляют обязательный и очень важный этап овладения умственными действиями.

Развитие у учащихся правильных представлений о характере отражения математикой явлений и процессов реального мира, роли математического моделирования в научном познании и в практике имеет большое значение для формирования диалектико-материалистического мировоззрения учащихся, их математического, психологического и общего развития. Можно сделать вывод, что одной из важных задач курса обучения детей математике является овладение детьми моделированием. Овладение школьниками общеучебным (универсальным) умением моделировать предполагает поэтапное овладение ими конкретными предметными умениями: представлять задачу в виде таблицы, схемы, числового выражения, формулы (уравнения), чертежа и уметь осуществлять переход от одной модели к другой. Учебный предмет, развертывающийся как система понятий, требует логики движения в его познании от всеобщих свойств к конкретным, выделение и исследование оснований, определяющих данную систему, что невозможно без языка моделирования. Моделирование в обучении должно быть усвоено учащимися и как способ познания, которым они должны овладеть, и как важнейшее учебное действие, являющееся составным элементом учебной деятельности. С этой целью обучение элементам математического моделирования начинается еще в средней школе. Изучение моделирования в этот период, большей своей частью, связано с решением сюжетных задач. Моделирование - это метод и средство познания, а сюжетные задачи – это один из «полигонов», где отрабатывается моделирование. Умение решать задачи выступает как один из критериев сформированности умения моделировать, а также служит мотивационной составляющей процесса обучения [8]. Сюжетные задачи есть первый класс задач, на которых раскрывается идея моделирования реальных процессов.

Но следует отметить, что представление школьников о моделировании и моделях весьма неясное и ограниченное.

Обучение с применением моделирования повышает активность мыслительной деятельности учащихся, помогает понять задачу, самостоятельно найти рациональный путь решения, установить нужный способ проверки, определить условия, при которых задача имеет или не имеет решение.

Моделирование можно рассматривать как особую деятельность по построению (выбору или конструированию) моделей, и как всякая деятельность она имеет внешнее практическое содержание и внутреннюю психическую сущность. Следовательно, моделирование как психическая деятельность может включаться в качестве компонента в такие психические процессы, как восприятие, представление, память, воображение и, конечно, мышление. В свою очередь, все эти психические процессы включаются в деятельность моделирования как сложную деятельность.

Модели и связанные с ними представления являются продуктами сложной познавательной деятельности, включающей прежде всего мыслительную переработку исходного чувственного материала, его «очищение» от случайных моментов. Модели выступают как продукты и как средство осуществления этой деятельности.

Терешин Н. А. выделяет следующие дидактические функции математического моделирования.

Познавательная функция.

Методической целью этой функции является формирование познавательного образа изучаемого объекта. Это формирование происходит постоянно при переходе от простого к сложному.

Здесь мысль учащегося направляется по кратчайшим и наиболее доступным путям к целостному восприятию объекта. Реализация познавательной функции не предопределяет процесса научного познания, ценность этой функции состоит в ознакомлении учащихся с наиболее кратчайшим и доступным способом осмысления изучаемого материала.

Функция управления деятельностью учащихся.

Математическое моделирование предметно и потому облегчает ориентировочные, контрольные и коммуникационные действия. Ориентировочным действием может служить, например, построение чертежа, соответствующего рассматриваемому условию, а также внесение в него дополнительных элементов.

Контролирующие действия направлены на обнаружение ошибок при сравнении выполненного учащимися чертежа (схемы, графика) с помещенными в учебнике или на выяснение тех свойств, которые должны сохранить объект при тех или иных преобразованиях.

Коммуникационные действия отвечают той стадии реализации функции управления деятельностью учащихся, которая соответствует исследованию полученных ими результатов. Выполняя эти действия, учащийся в свете собственного опыта объясняет другим или хотя бы самому себе по построенной модели суть изучаемого явления или факта.

Интерпретационная функция.

Известно, что один и тот же объект можно выразить с помощью различных моделей. Например, окружность можно задать с помощью пары объектов (центр и радиус), уравнением относительно осей координат, а также с помощью рисунка или чертежа. В одних случаях можно воспользоваться ее аналитическим выражением, в других – геометрической моделью. Рассмотрение каждой из этих моделей является ее интерпретацией; чем значимей объект, тем желательней дать больше его интерпретаций, раскрывающих познавательный образ с разных сторон.

Можно также говорить об *эстетических функциях* моделирования, а также о таких, как *функция обеспечения целенаправленного внимания учащихся, запоминания и повторения учащимися учебного материала* и т. д.

Кроме этих функций можно выделить еще одну – не менее важную – *эвристическую*. Математическая модель, выступая как выражение количеством качества объекта, позволяет экспериментировать с его количественной стороной, дает возможность определить границы устойчивости, нормальный и оптимальный режимы функционирования, еще глубже проникнуть в качественный аспект объекта — показать его внутренние закономерности. В этом и раскрывается эвристическая функция математического моделирования и его возможности для решения проблем разных наук: биологии, химии, физики, медицины и других.

Применение нескольких функций математической модели способствует наиболее плодотворному мышлению учащегося, так как его внимание легко и своевременно переключается с модели на полученную с ее помощью информацию об объекте и обратно. Такое переключение сводит к минимуму отвлечение умственных усилий учащихся от предмета их деятельности.

Таким образом, включение моделирования в учебный процесс рационализирует его и одновременно активизирует познавательную деятельность учащихся. Следовательно, решается не только конкретная учебная задача, но и осуществляется развитие учащихся. Широкое использование моделирования – одно из методических средств развивающего обучения математике. Моделирование отражает преимущественно теоретический стиль мышления, который в большей мере содействует развитию учащихся, приобщает их к научному стилю мышления.

1.5.Методические условия использования математического моделирования на уроках математики

В настоящее время основным результатом образования является не столько набор знаний, умений и навыков учащегося, сколько выработанная в ходе обучения способность к анализу и дальнейшему разрешению проблемы в сложившихся условиях, в ходе чего и привлекается запас имеющихся знаний и умений из различных предметных областей. Естественным этапом развития познания, на котором осуществляется переход от содержательного и качественного анализа объекта к формализации и количественному анализу, является **математическое моделирование реальных процессов.**
Моделирование – метод исследования объектов на их моделях – аналога определенного фрагмента природы или социальной реальности
Исследование – это процесс и результат научной деятельности, направленной на получение новых знаний о закономерностях, структуре, механизме обучения и воспитания, теории и истории воспитания, методике организации учебно-воспитательной работы, ее содержания, принципах, методах организации и формах.

Необычная общность понятия модели, тесная связь его со свойством отражения в природе ведут к тому, что достаточно точное определение не может быть простым и включает весьма общие категории.

Под моделью понимают систему, неотличимую от моделируемого объекта в отношении некоторых свойств, полагаемых существенными, и отличимую по всем остальным свойствам, которые полагаются несущественными.

Математическое моделирование — основа происходящей в настоящее время математизации научных знаний и, кроме того, важный этап познания: математические модели соответствуют понятию отражения в диалектической теории познания.

Поэтому одной из основных задач школьного математического образования является ознакомление учащихся с соотношениями между явлениями реального или проектируемого мира и его математическими моделями, практическое их обучение построению математических моделей, объяснение им того, что абстрактная математическая модель, в которой отброшено все несущественное, позволяет глубже понять суть вещей.

Одной из целей математического образования считаю, формирование **основ математического моделирования**, т. е. формирование мыслительной способности извлекать из модели те знания о реальности, которые связывают ее с прототипом.

Поставленная мною педагогическая цель достигается путем решения некоторых методических условий:

1. Учет уровня усвоения учебного материала.

В обучении математики дифференциация имеет особое значение, что объясняется спецификой этого учебного предмета. Математика объективно является одной из самых сложных школьных дисциплин и вызывает субъективные трудности у многих школьников.

I. По уровню сложности задач:

1) задачи минимального уровня (нужно применить знания в аналогичной ситуации);

2) задачи общего уровня (применение знаний в частично измененных задачах);

3) задачи продвинутого уровня (решение нестандартных задач).

II. По мере помощи учителя:

1) учитель помогает и в составлении модели и в решении задач;

2) учитель помогает составить модель, но решение учащиеся предлагают сами, и наоборот;

3) самостоятельное составление модели и её решение.

2.Учет межпредметных связей.

Межпредметные связи выполняют в обучении математики ряд функций. Методологическая функция выражена в том, что только на их основе возможно формирование у учащихся диалектико-материалистических взглядов на природу, современных представлений о ее целостности и развитии, поскольку межпредметные связи способствуют отражению в обучении методологии современного естествознания, которое развивается по линии интеграции идей и методов с позиций системного подхода к познанию природы. Образовательная функция межпредметных связей состоит в том, что с их помощью учитель математики и формирует такие качества знаний учащихся, как системность, глубина, осознанность, гибкость. Межпредметные связи выступают как средство развития математических понятий, способствуют усвоению связей между ними и общими понятиями. Развивающая функция межпредметных связей определяется их ролью в развитии системного и творческого мышления учащихся, в формировании их познавательной активности, самостоятельности и интереса к познанию математики. Межпредметные связи помогают преодолеть предметную инертность мышления и расширяют кругозор учащихся. Воспитывающая функция межпредметных связей выражена в их содействии всем направлениям воспитания школьников в обучении математики Учитель математики, опираясь на связи с другими предметами, реализует комплексный подход к воспитанию. Конструктивная функция межпредметных связей состоит в том, что с их помощью учитель совершенствует содержание учебного материала, методы и формы организации обучения. Реализация межпредметных связей требует совместного планирования учителями предметов естественнонаучного цикла комплексных форм учебной и внеклассной работы, которые предполагают знания ими учебников и программ смежных предметов.

Предметы естественно-математического цикла дают учащимся знания о живой и неживой природе, о материальном единстве мира, о природных ресурсах и их использовании в хозяйственной деятельности человека. Общие учебно-воспитательные задачи этих предметов направлены на всестороннее гармоничное развитие личности. Важнейшим условием решения этих общих задач является осуществление и развитие межпредметных связей предметов, согласованной работы учителей-предметников.

Изучение всех предметов естественнонаучного цикла тесно связано с математикой. Она дает учащимся систему знаний и умений, необходимых в повседневной жизни и трудовой деятельности человека, а также важных для изучения смежных предметов.

На основе знаний по математике в первую очередь формируются общепредметные расчетно-измерительные умения. Преемственные связи с курсами естественнонаучного цикла раскрывают практическое применение математических умений и навыков. Это способствует формированию у учащихся целостного, научного мировоззрения.

Моделирование как метод познания включает в себя:

- построение, конструирование модели;
- исследование модели(экспериментальное или мысленное);
- анализ полученных данных и перенос их на подлинный объект изучения.

Решая прикладные задачи, мы проходим названные выше три этапа:

- построение модели (перевод условия задачи с обыденного на математический язык)

- работа с моделью (решение уравнения, неравенства и т. д.)
- ответ на вопрос задачи

Таким образом, современная концепция межпредметных связей предметов естественно-математического цикла ориентирует учителей на систематическую взаимосвязь учебных предметов, активную реализацию межпредметности в содержании, методах и формах организации обучения, во внеклассной работе, широкого внедрения в практику обучения интегрированных уроков, элективных курсов, объединяющих знания из различных научных и практических областей.

3. Интегрированное обучение.

Общепредметные умения формируются на межпредметной основе, когда учителя различных предметов предъявляют к учащимся единые требования, исходя из общей структуры умений, последовательности выполняемых действий и этапов формирования и развития умений (показ образца действий, его осмысление, упражнение в его применении на материале различных предметов, закрепление при выполнении комплексных межпредметных заданий, в самостоятельных работах творческого характера).

Роль интегрированных уроков трудно переоценить. В практической педагогической деятельности они находят все более широкое применение, что соответствует целям и задачам современного процесса воспитания и обучения.

В процессе урока большая часть времени отводится для практической, самостоятельной, поисковой работы. Для того, чтобы изучение материала было более эффективно необходимо ознакомить учащихся с рабочей картой урока.

На каждом этапе урока предлагаются разные формы работы, которые направлены на повышение познавательной активности учащихся. Задания, которые предлагаются учащимся, могут варьироваться в зависимости от уровня развития детей. Их может быть больше или меньше, это решает учитель, учитывая психолого-физиологические особенности контингента учеников. Организационный этап урока учитель проводит с привлечением учащихся, которые в формулируют тему урока, определяют цели и задачи. На данном этапе можно поставить проблемный вопрос, который тоже приведет к теме урока.

На остальных этапах урока может, используется компьютер. Перед уроком, преподавателю необходимо скинуть весь раздаточный материал на каждый компьютер в одну папку. Это позволит сэкономить время на уроке и организовать деятельность учащихся. Если педагог не владеет компьютером, то урок можно провести, используя материал приложений.

Например, в 5 и 6 классах учащиеся изучают такие естественные науки как природоведение, естествознание, биология, география.

Можно воспользоваться моделями Земли в виде глобуса и карты на уроках географии, или поиграть в игру «Хищник-жертва» на уроке биология (другое более известное название - «Жизнь»).

Более интересным станет урок естествознания, если, используя компьютерные технологии, показать движение планет Солнечной системы или рост популяции, к примеру, саранчи.

Аналогично, можно выше перечисленное использовать и на уроках математики.

Например, с помощью карты материков, зная её масштаб, найти расстояние между городами. А с помощью игры «Жизнь» показать рост популяции животных.

Компьютерные технологии станут помощниками в решении некоторых логических задач, на которые ученики могут потратить массу времени.

Глава 2. Обучение школьников элементам математического моделирования

2.1. Обзор школьных учебников по математике для 5-6 классов

В учебнике по математике для 5 класса Дорофеева Г. В., Петерсон Л. Г. уже во втором параграфе предлагается для изучения тема «Математические модели», поэтому далее весь материал опирается на понятия «математическая модель» и «моделирование».

Авторы не дают определение модели, а на примере двух задач показывают, что в двух непохожих ситуациях используется одна и та же *математическая модель*, сразу указывая на ценность математического моделирования, что одна и та же модель может описывать различные явления. Для того чтобы построить математическую модель, надо, прежде всего, научиться переводить условия задач на математический язык.

Самая распространенная формулировка заданий, характерная для метода моделирования, звучит следующим образом:

- ✓ переведи условие задачи на математический язык;
- ✓ построй математическую модель задачи и реши ее.

Далее говорится, что после перевода задачи на математический язык поиск решения сводится *к работе с математическими моделями* – к вычислениям, преобразованиям, рассуждениям.

В 6 классе выделяются этапы процесса математического моделирования, в соответствии с этими этапами выделяются этапы решения задач с помощью уравнений.

Большое внимание уделяется этапу формализации, который вызывает у школьников наибольшие трудности при решении задач.

Для сравнения возьмем учебники по математике для 5 – 6 классов Н. Я. Виленкина и других, Г.В. Дорофеева и И. Ф. Шарыгина, И. И. Зубаревой и А. Г. Мордковича и определим, какую роль авторы этих учебников отводят моделированию.

В учебниках Н.Я. Виленкина понятия «модель» и «моделирование» не вводятся ни в 5, ни в 6 классах, соответственно нет задач с формулировкой, характерной для метода моделирования.

В учебнике Г.В. Дорофеева 6 класс небольшое внимание уделяется математическому языку, но не встречаются сюжетные задачи, требующие перевода условия задачи с русского на математический язык.

В учебнике И. И. Зубаревой и А. Г. Мордковича 5 класс изучаются темы «Математический язык», «Математическая модель». Как и в учебнике Г.В. Дорофеева 5 класс понятие модели вводится с помощью рассмотрения двух задач, в которых требуется найти значение одного и того же выражения. Выражение, полученное в процессе решения, - это математическая модель реальной жизненной ситуации, о которой говорится в задаче.

Авторы пишут: «Выполняя задания по переводу «обычной» речи на математический язык, мы каждый раз составляли математическую модель данной ситуации. Однако важно не только уметь составлять математические модели, но и выполнять обратную работу – понимать, какую ситуацию (или обстоятельства) описывает данная модель». Так неявно выделяются этапы моделирования: формализация и интерпретация.

Но следует отметить, что задачи, в которых требуется построить математическую модель, встречаются в учебниках И. И. Зубаревой очень редко.

2.2. Методические особенности обучения математическому моделированию

Учебники Г. В. Дорофеева, Л. Г. Петерсон «Математика-5», «Математика-6» [11 – 15] входят в часть единого непрерывного курса математики и являются продолжением учебника математики для начальной школы авторов Н. Я. Виленкина и Л. Г. Петерсон. Этот курс разрабатывается в настоящее время с позиции развивающего обучения, гуманизации и гуманитаризации математического образования.

Обучение школьников ведется на высоком уровне трудности. Но материал учебников предусматривает возможность работы по ним детей разного уровня подготовки.

Учебники ориентированы на развитие логического мышления, творческих способностей ребенка и интереса к математике. Учебник для 5 класса состоит из двух частей, для 6 класса – из трех. Каждая часть включает в себя две главы. Эти учебники позволяют учащимся самостоятельно добывать знания, а главное учат учиться. С первых уроков ученикам предлагаются задания для формирования умений сравнивать, обобщать, классифицировать, рассуждать. Большая часть заданий требует от учащихся творческого подхода.

Новый материал вводится не через передачу готового знания, а через самостоятельное «открытие» его учениками. Часто задания для закрепления даны в игровой форме (кодирование и расшифровка, отгадывание загадок и т.п.) Учащиеся с огромным удовольствием выполняют эти задания.

В учебнике в системе даны задания на развитие логики, мышления, развитие всех видов памяти, творческих способностей.

«В совершенно различных, на первый взгляд, задачах можно обнаружить, что их решение практически одинаково. Например, если на столе лежат 2 яблока, 2 апельсина и груша, то как найти общее число фруктов? Конечно, 2 + 2 + 1 = 5. Но ведь точно также мы можем определить и число уроков во вторник, зная, что по расписанию будет два урока русского языка, две математики и физкультура.

В этих двух непохожих ситуациях мы использовали одну и ту же **математическую модель**, складывая не яблоки с апельсинами и не физкультуру с математикой, а натуральные числа.

Для того чтобы построить математическую модель, надо, прежде всего, научиться переводить условие задачи с привычного родного языка на специальный, математический язык, чем мы и займемся в этом пункте,» – так авторы учебника проводят мотивацию изучения математического моделирования еще в самом начале курса математики пятого класса (п. 1, §2, глава 1, [11]). Рассмотренный пример, настолько прост и нагляден, что понятен даже пятиклассникам, и становится ясно, что с помощью модели решать задачу будет проще, но еще не понятно, что именно представляет собой математическая модель.

Далее говорится, что после перевода задачи на математический язык поиск решения сводится *к работе с математическими моделями* – к вычислениям, преобразованиям, рассуждениям.

В этом же пункте авторы составляют модели пяти разнообразных задач, которые располагаются среди предложенных для решения, в том числе задач, основной сутью которых является отработка навыка перевода задачи на математический язык. Такими задачами являются задачи со следующими формулировками:

✓ Составь выражения на вопросы задач:

- Прямоугольный участок земли имеет длину 85 м и ширину x м. Найдите периметр этого участка.
- Ширина прямоугольного участка 47 м, а его длина в 5 раз больше. Чему равен периметр?
- Длина прямоугольного участка x м, а ширина- y м.Чему равен периметр участка?

✓ Придумай задачи, в которых математической моделью являются следующие выражения:

- x+15=45
- y-12=18

✓ Среди данных задач найди такие задачи, математические модели которых совпадают:

- В корзине несколько грибов. После того как из нее вынули 10 грибов, а затем в нее положили 14 грибов, в ней стало 85 грибов. Сколько грибов было в корзине первоначально?
- У мальчика было 16 почтовых марок. Он купил еще несколько марок, после этого подарил младшему брату 23 марки, и у него осталось 19 марок. Сколько марок купил мальчик?

✓ Составь схему к задаче:

- Первое слагаемое равно 5460, второе – больше него на 545 десятков, третье – на46 сотен больше второго, а четвертое равно сумме первых трех слагаемых. Составьте схему к задаче и найдите сумму всех четырех слагаемых.

- ✓ Переведи условие задачи с русского языка на математический:
  - Винни-Пух был в гостях у Пятачка. Уходя, он забыл у него воздушный шарик. Пятачок заметил это только через 12 минут после ухода Винни-Пуха и сразу побежал за ним вдогонку, чтобы отдать шарик. Ему удалось догнать довольно быстро Винни,поскольку тот шел не торопясь, со скоростью 50 м/мин, а Пятачок бежал быстро – 200 м/мин.
    1) Какое расстояние Винни-Пух прошел за 12 минут;
    2) На какое расстояние Пятачок приближался к Винни за одну минуту;
    3) Сколько времени понадобилось Пятачку, чтобы догнать Винни-Пуха.
- ✓ Составь таблицу по условию задачи:
  - Отцу x лет, а сыну y лет. Отец старше сына на 30 лет. Составьте таблицу если известно, что отцу 45,50,60 лет.

Весь этот пункт направлен на овладение школьниками первым этапом решения задач с помощью математического моделирования. Заметим, что задачи с такими формулировками встречаются не только в этом пункте, но и по всему тексту учебника, что дает возможность сформировать у учащихся не только умения, но и навыки построения математических моделей сюжетных задач.

Но кроме умения строить математические модели необходимо уметь их разрешать и переводить результат на понятный человеку язык. Эти два этапа процесса моделирования авторы объединяют в один, который называют «Работа с математической моделью» (п. 2, §2, глава 1, [11]). Из рассмотренных в этом пункте примеров видно, что после перевода текста задачи на математический язык поиск решения сводится к работе с математическими моделями – к вычислениям, преобразованиям, рассуждениям. Для получения результата в некоторых задачах достаточно использовать алгоритмы действий с числами (например, № 82, [11]), в других – решение уравнений (например, № 144, [11]). Отсюда следует, что чем больше математических понятий и свойств знают учащиеся, тем больше они имеют возможность для отыскания короткого и простого решения.

При решении математических задач часто бывает так, что исследование полученной математической модели не сводится к известным случаям, то есть у учащихся нет достаточных знаний для исследования той или иной модели. Авторы учебника предлагают два специфических способа исследования математических моделей:

1) метод проб и ошибок;

2) метод перебора.

Рассмотрим на примерах, в чем состоит суть этих методов.

Метод проб и ошибок позволяет найти ответ даже в том случае, когда математическая модель представляет собой новый, еще не изученный объект. Однако при использовании этого метода следует всегда помнить о том, что подбор одного решения не гарантирует полноты решения. Поэтому требуется дополнительное обоснование того, что найдены все возможные решения, и ни одного не пропущено.

Задача. Ширина прямоугольника на 9 см меньше длины, а площадь равна 90 см^2. Найти стороны прямоугольника (см. № 168 (2), [11]).

Решение. Математическая модель представляет собой следующее уравнение: $x \cdot (x-9) = 90$. Нужно найти x и $x-9$. Никакие известные пятиклассникам правила преобразования не помогают найти ответ. Авторы предлагают подобрать решение «экспериментально», так называемым методом проб и ошибок.

Нам надо найти такое число x, чтобы значение выражения $x\ (x - 9)$ было равно 90. Попробуем подставить в это выражение, например $x = 13$:

$$13\ (13 - 9)=52$$

Мы видим, что полученное значение выражения слишком мало. Возьмем теперь $x = 14$:

$$14\ (14 - 9)=70$$

И снова выбранное значение мало, хотя и ближе к искомому.

Далее возьмем $x = 15$. Получим:

$$15\ (15 - 9)=90$$

Эта попытка оказалась удачной, при $x = 15$ имеем $15\ (15 - 9)=90$. Казалось бы, что задача уже решена, но это не так: ведь может оказаться, что есть другие x, при которых это выражение тоже равно 90. Допустим, что $x > 15$, тогда $x - 9 > 6$, следовательно произведение будет больше 90. Пусть $x < 15$, тогда $x - 9 < 6$, получим, что $15\ (15 - 9)<90$.

Нам требуется найти стороны прямоугольника. Получаем, $x =15$ и $x-9=6$. Ответ: 15 см и 6 см.

Данный метод служит мощным средством при решении еще неизвестных уравнений, неравенств и систем уравнений. Однако он очень трудоемкий и нужно добиваться от учащихся поиска более рационального метода решения, если это является возможным в данной ситуации.

При решении задач методом проб и ошибок учитель должен объяснить школьнику, что простой подбор одного неизвестного числа не дает уверенности в том, что найдены все искомые значения. Поэтому для обоснования полноты решения требуются дополнительные иногда очень непростые рассуждения, а, значит, метод проб и ошибок имеет недостаток, который, в свою очередь не имеет другой метод – метод перебора.

Метод полного перебора(метод полной индункции). При поиске неизвестного числа полным перебором автор поясняет, что следует рассматривать «все мысленные возможности: если мы упустим хотя бы одну, то может оказаться, что именно она и дает решение задачи» [11].

Полный перебор требует, как правило, больших усилий и большого времени. Но следует обратить внимание учащихся на анализ условия, тем самым сократить систему перебора. Рассмотрим задачу.

Задача. Задумано двузначное число, которое на 66 больше произведения своих цифр. Какое число задумано?

Решение. После составления модели получаем следующую задачу:

Для цифр x и y двузначного числа выполняется равенство $10x + y = xy + 66$. Найти это число.

Полный перебор можно провести, рассматривая последовательно все значения x от 1 до 9 и подбирая в каждом случае соответствующее значение y от 0 до 9. Однако этот перебор можно сократить, если заметить, что правая часть равенства больше 66. Значит, и левая его часть, то есть задуманное число больше 66. Поэтому неизвестное число x не меньше 6, и можно рассматривать только четыре значения x – от 6 до 9.

При $x = 6$ наше равенство имеет вид $60 + y = 6y + 66$, а этого быть не может, так как левая часть получилась меньше правой при любых значениях y от 0 до 9.

При $x = 7$ имеем $70 + y = 7y + 66$. Если мы от каждой части этого равенства отнимем одно и то же число y, то получим $70 = 6y + 66$, откуда $6y = 4$, что для натурального числа не возможно.

При $x = 8$ имеем равенство $80 + y = 8y + 66$. Снова, вычитая из каждой части y, получим, $80 = 7y +66$, $7y = 14$, $y = 2$. Таким образом, для чисел $x = 8$ и $y = 2$ равенство выполняется, и число 82 удовлетворяет условию задачи:

$$82 = 8 \cdot 2 + 66.$$

Следует обратить внимание учащихся, что нельзя считать задачу полностью решенной, поскольку перебор еще не закончен, и среди не рассмотренных случаев могут найтись решения.

Выполняя аналогичные преобразования, имеем при $x = 9$:

$$90 + y = 9y + 66,$$

$$90 = 8y + 66,$$

$$8y = 24,$$

$$y = 3.$$

Показывая учащимся, что получилось еще одно решение, число 93, которое удовлетворяет $93 = 9 \cdot 3 + 66$, мы подчеркиваем важность полного перебора.

Авторы также советуют проводить перебор с помощью таблицы:

X	***Уравнение***	***Упрощенное уравнение***	***Y***
6	$60 + y = 6y + 66$	$5y=6$	невозможно
7	$70 + y = 7y + 66$	$6y = 4$	невозможно
8	$80 + y = 8y + 66$	$7y = 14$	$y = 2$
9	$90 + y = 9y + 66$	$8y = 24$	$y = 3$

После того, как произведен полный перебор, важно научить школьников формулировать ответ в соответствии вопросу исходной задачи. В данном случае ответ будет таков: задумано либо число 82, либо 93.

К методу проб и ошибок и к методу перебора авторы еще раз возвращаются уже в 6 классе (§ 3, глава 3, [15]).

В 6 классе продолжается обучение методу математического моделирования. При изучении темы «Решение уравнений» рассматриваются различные по сюжету задачи, которые решаются с помощью уравнений. Но прежде чем приступить к решению задач, авторы учебника пытаются дать ответ на вопрос: «Для чего решают задачи?» и приходят к выводу, что, решая задачи, мы учимся строить математические модели реальных ситуаций. Далее выделяются три этапа математического моделирования:

1) построение модели;
2) работа с моделью;
3) практический вывод.

Распространенным видом математических моделей являются уравнения. В соответствии с этапами моделирования решение задач с помощью уравнений состоит также из трех этапов:

1) составление уравнения;
2) решение уравнения;
3) ответ на вопрос задачи.

Учащиеся обучаются выбирать переменные, составлять уравнения, решать их и анализировать результат.

Система задач, приведенная в учебниках [11 – 15] позволяет достаточно полно раскрыть методы исследования математических моделей, большое внимание уделяется решению задач с помощью уравнений, так как уравнения – это основной вид моделей, изучаемых в 5 – 6 классах. На основе этих упражнений учащиеся должны научиться понимать ценность решения сюжетных задач, видеть их практическую значимость, а также понимать значение математической модели, уметь строить ее, искать наиболее рациональный способ ее исследования и правильно делать вывод о проделанной работе, в том числе правильно формулировать ответ на задачу.

2.3. Формирование умений учащихся, используемых при математическом моделировании

Известно, что процесс математического моделирования осуществляется в три этапа:

1) формализация;

2) решение внутри модели;

3) интерпретация.

Задача . Два автомобиля выехали одновременно из пункта А в пункт В, расстояние между которыми 540 км. Первый автомобиль ехал со скоростью 90 км/ч и прибыл в пункт В на 45 мин раньше второго. Найдите скорость второго автомобиля.

I этап. Формализация. Построим математическую модель задачи.

Обозначим за *x* км/ч – скорость второго автомобиля.

$\frac{540}{x}$ ч – время, потраченное на весь путь вторым автомобилем.

$\frac{540}{90}$ ч – время, потраченное на весь путь первым автомобилем.

Известно, что второй автомобиль потратил на путь на 45 мин больше, чем первый. $45 мин = \frac{3}{4} ч$.

$\frac{540}{x} - \frac{540}{90} = \frac{3}{4}$. Полученное уравнение является математической моделью данной задачи.

II этап. Внутримодельное решение.

Перенесем все слагаемые в одну часть $\frac{540}{x} - \frac{540}{90} - \frac{3}{4} = 0$.

Приведем слагаемые к общему знаменателю $\frac{540}{x} = \frac{27}{4}$.

Получили, что x=80 *км/ч.*

III этап. Интерпретация. Переведем результат с математического языка на язык исходной задачи

Следует отметить, что в школе больше внимания уделяется работе над вторым этапом моделирования, в то время как формализация и интерпретация остаются недостаточно раскрытыми. Необходимо организовать обучение учащихся элементам моделирования, относящимся ко всем трем этапам. Важным средством обучения элементам моделирования, относящимся к этапам формализации и интерпретации, являются сюжетные задачи, но этап формализации при решении школьных сюжетных задач оказывается, представлен слишком узко. Учащимся, как правило, сразу предъявляется словесная модель задачи, поэтому представления о характере отражения математикой явлений, описываемых в задачах, часто оказываются весьма примитивными, то есть нет условий для содержательного раскрытия деятельности, проходящей на этом этапе математического моделирования. Поэтому надо искать пути содержательного раскрытия и конкретизации этапов формализации и интерпретации математического моделирования. Уже в 5 – 6 классах целесообразно использовать задачи, которые позволяют учить школьников действиям, характерным для этапов формализации и интерпретации.

Моделирование включает в себя большое число составных элементов, поэтому большую роль в успешности работы по математическому моделированию играет выявление элементов математического моделирования. В. А. Стукалов [28] выявляет следующие элементы:

1) замена исходных терминов выбранными математическими эквивалентами;

2) оценка полноты исходной информации и введению при необходимости недостающих числовых данных;

3) выбор точности числовых значений, соответствующей смыслу задачи;

4) оценка возможности получения числовых данных для решения задачи на практике.

На основе перечисленных элементов математического моделирования, характерных для этапов формализации и интерпретации, можно выделить умения, которыми должны овладеть учащиеся для успешного освоения методом математического моделирования:

1) умение заменять исходные термины математическими эквивалентами;

2) умение оценивать полноту исходной информации;

3) умение выбирать точность числовых значений;

4) умение оценивать возможность получения числовых данных для решения задачи.

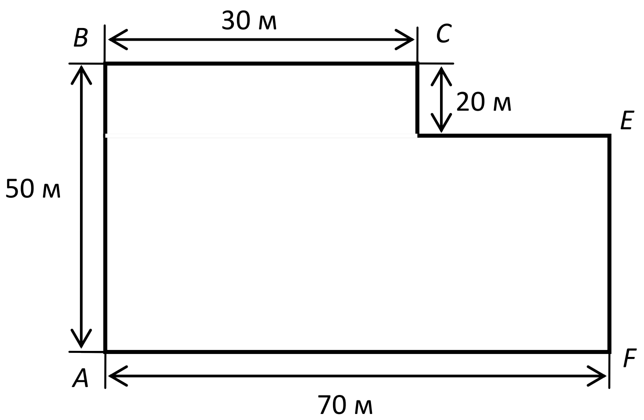
Проанализируем учебники Г. В. Дорофеева, Л. Г. Петерсон с точки зрения наличия задач, применяемых для формирования у учащихся 5 – 6 классов выделенных умений.

Выполнение действия замены исходных терминов выбранными математическими эквивалентами основывается прежде всего на жизненном опыте учащихся, то есть знании терминов, встречающихся в быту или при изучении других предметов, которые могут быть заменены математическими понятиями и отношениями. Из этого следует, что в системе задач школьных учебников должно быть больше задач, содержащих термины из различных научных областей, но не требующих длительного и громоздкого объяснения их сущности. Кроме этого, задачи расширяют словарный запас учащихся, знакомят с новыми интересными фактами из разных наук, вооружают учащихся навыками самостоятельной работы, способствуют сознательному применению имеющихся знаний к жизни, знакомят их с новыми приемами решения, развивают математическое мышление и практическую смекалку.

Обучение замене исходных терминов может происходить при формировании понятий. В анализируемых учебниках [11 – 15] такими математическими эквивалентами являются понятия «прямоугольник», в частности, «квадрат», «прямоугольный параллелепипед» (в частном случае «куб»), «окружность», «сфера». В заданиях, предложенных авторами учебника, всегда наряду с исходным термином указывается его математический эквивалент, что по нашему мнению является целесообразным. В тексте учебника встречаются следующие задачи.

Понятие «*прямоугольник*»

- Площадь баскетбольной площадки прямоугольной формы a м^2, а длина 20 м. Какова ее ширина?
- На рисунке показан план земельного участка и указаны его размеры. Найди площадь этого участка, и выразили ее в арах. Какова длина прямоугольника, имеющего такую же площадь и ширину 45 м?



- Переведи условие задачи на математический язык: Под строительную площадку отвели прямоугольный участок, длина которого на 25 м больше его ширины. При утверждении плана застройки длину участка увеличили на 5 м, а ширину – на 4 м, в результате площадь участка увеличилась на 300 м^2. Какова площадь образовавшейся строительной площадки?

- Построй математическую модель задачи и найди ответ методом перебора:

Прямоугольный газон обнесен изгородью, длина которой 30 м. Площадь газона 56 м^2. Найди длины сторон газона, если известно, что они выражаются натуральными числами.

Понятие «*параллелепипед*»

Прямоугольный параллелепипед является математическим эквивалентом «аквариума», «печи», «ящика», «бассейна». Например.

- Из фанеры требуется сделать открытый ящик, имеющий форму прямоугольного параллелепипеда с измерениями 40 см, 20 см и 15 см. Сколько фанеры потребуется для изготовления ящика? Какова будет его вместимость?
- Из жести сделали бак без крышки. Он имеет форму куба с длиной ребра 8 дм. Бак надо покрасить снаружи и изнутри. Какую площадь надо покрасить? Какова вместимость бака?
- Чтобы сделать бассейн, в земле выкопали котлован в форме прямоугольного параллелепипеда длиной 25 м, шириной 6 м и глубиной 3 м. Сколько кубических метров земли пришлось вынуть?
- Имеется два аквариума с измерениями 45×32×50 см и 50×32×45 см.

а) На изготовление какого из двух аквариумов потребовалось больше стекла?

б) Аквариумы заполнили водой так, что уровень воды в первом аквариуме ниже верхнего края на 10 см, а во втором – на 5 см. В каком аквариуме больше воды? (См. № 547, [15]).

Понятия «*окружность*» и «*круг*»

При изучении окружности, круга и их свойств в учебнике используются задачи, в которых используются такие термины как «окружность колеса», «обороты колеса», «арена цирка», «циферблат часов», «беговая дорожка», «экватор Земли».

- Великий древнегреческий математик Архимед (III в. до н.э.) установил, что длина окружности примерно в $3\frac{1}{7}$ раза больше ее диаметра.

Пользуясь этим результатом, реши задачу: Какова длина беговой дорожки ипподрома, имеющей форму круга радиусом $\frac{7}{8}$ км?

- Длина экватора Земли равна примерно 40000 км, а ее диаметр составляет $\frac{8}{25}$ длины экватора. Чему равен диаметр Земли?
- Сколько оборотов сделает колесо на участке пути в 1,2 км, если диаметр колеса равен 0,8 м? Число π округли до целых .
- Чему равна площадь циферблата часов, если длина минутной стрелки равна 4,5 см. Число π округли до целых .
- Арена цирка имеет длину 40,8 м. Найди диаметр и площадь арены. Число π округли до целых.

Также при обучении действию замены исходных терминов выбранными математическими эквивалентами применяются задачи, в которых требуется замена одной единицы измерения другой более мелкой и наоборот. Таких задач в учебниках очень много, но в основном в них требуется переводить километры в метры, метры в сантиметры, минуты в часы, что не вызывает больших сложностей у школьников. Например.

- Чтобы связать шарф длиной 1,4 м, нужно 350 г шерсти. Сколько шерсти потребуется, чтобы связать шарф такой же ширины длиной 180 см?
- Подводная лодка, идя со скоростью 15,6 км/ч, пришла к месту назначения за 3 ч 45 мин. С какой скоростью она должна была идти, чтобы пройти весь путь на 45 мин быстрее.

Часто на практике используются такие единицы времени, как неделя, декада, квартал, век. В учебниках недостаточно задач, в которых название единиц измерения включено в сюжет задачи и требуется заменить одну единицу измерения другой в соответствии с условием. В таких задачах математическим эквивалентом будет являться число более мелких единиц измерения.

- Средняя температура воздуха за неделю равна 18,6°, а за шесть дней без воскресенья – 18,4°. Какой была температура воздуха в воскресенье?

Мы считаем, что необходимо рассматривать больше задач, в которых требуется перевод единиц измерения, не водящих в известные системы мер, чем их приведено в учебниках [11 – 15].

При обучении *действию оценки полноты исходной информации и введения при необходимости недостающих числовых данных* необходимо учитывать компоненты, которые могут быть в условии этих задач: сюжет (объекты), величины, их характеризующие, значения этих величин. При этом можно выделить следующие типы задач, представленные в таблице [19].

	сюжет	величины	значения
а)	+	+	-
б)	+	-	+
в)	-	+	+
г)	-	-	+
д)	-	+	-
е)	+	-	-

Знак «+» обозначает наличие соответствующего компонента в условии, знак «-» - отсутствие. Знак «-» в графе «сюжет» характеризует задачи, в которых требуется подобрать объекты по заданным величинам и (или) значениям. Знак «-» в графе «величины» предполагает выделение системы необходимых исходных величин в условиях лишних или недостающих данных. Комбинации «+», «+», «+» и «-», «-», «-» не рассматриваются как не представляющие интереса.

Кроме того, задачи внутри одного типа могут отличаться и формой задания: таблица, диаграмма, чертеж, краткая запись и т. д. Приведем примеры задач, встречающихся в анализируемых учебниках, соответствующие выделенным типам.

Первый тип соответствует комбинации «+», «+» «-» и характеризуется *наличием сюжета, величин и отсутствием значений величин*. Сюда относятся такие задачи как:

- По шоссе автомобиль двигался 2 часа со скоростью 90 км/ч, а по проселочной дороге – 5 часов со скоростью v км/ч. Сколько всего километров проехал автомобиль по шоссе и по проселочной дороге?

- Зарплату рабочего, равную n руб., повысили сначала на 10%, а потом еще на 40% от новой суммы. Какой стала зарплата после второго повышения?

- Цену на компьютер снизили сначала на 20%, а потом еще на 50% от новой цены. После этого компьютер стал стоить k руб. Какой была его первоначальная цена?

Ко второму типу относятся задачи, в которых *есть сюжет, числовые данные, но нет величин, которые они характеризуют*. Например.

- В пяти ящиках лежит по одинаковому числу яблок. Если из каждого ящика вынуть 60 яблок, то во всех ящиках останется столько яблок, сколько их раньше было в двух ящиках. Сколько яблок было в каждом ящике?

- Составь выражение для задачи и найди его значение:

В классе 25 учеников. Из них после уроков домой ушли 7 человек, а остальные разбились на 3 команды для игры. Сколько человек в каждой команде?

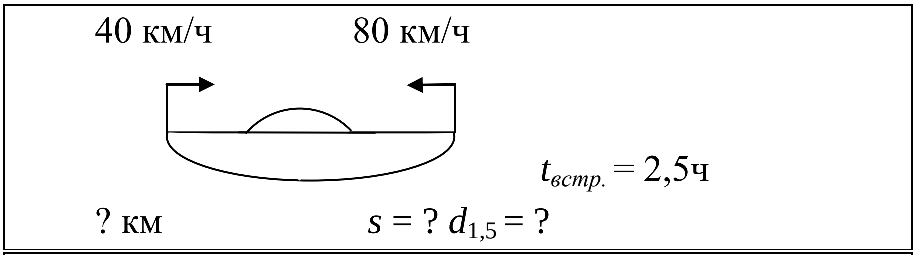
- Переведи условие задачи с русского языка на математический язык:

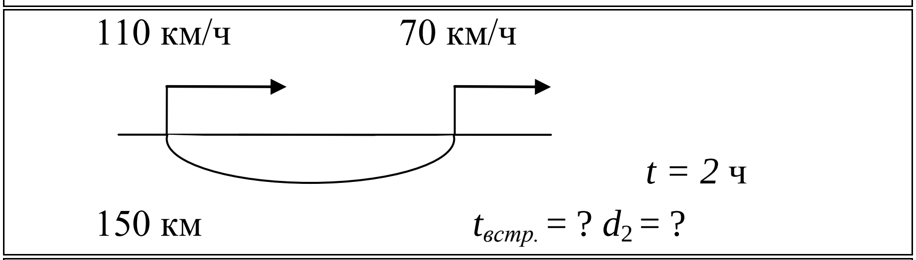
На вопрос учеников о прошедшей контрольной работе учитель ответил: «Пятерок на 3 больше, чем двоек, троек на одну меньше, чем четверок, а четверок в 4 раза больше, чем двоек». Сколько человек получили пятерки и сколько четверки, если в классе 32 человека?

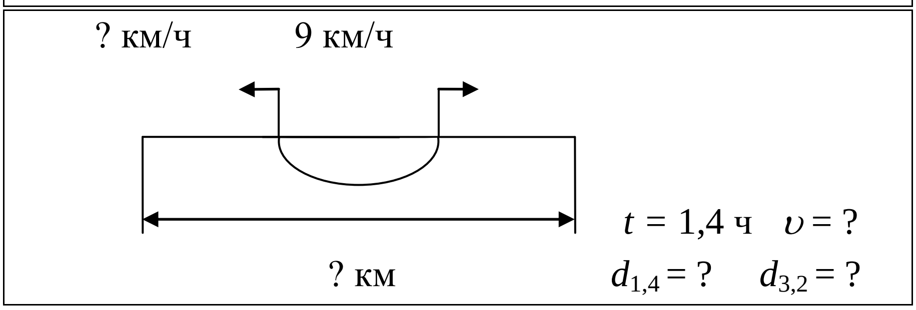
Ясно, что в учебнике очень много сюжетных задач, содержащих числовые данные, что обосновано целями образования.

Третий тип соответствует комбинации «-», «+» «+». К этому типу относятся задания, в которых нужно составить задачу по схеме или краткой записи. В учебниках Г. В. Дорофеева, Л. Г. Петерсон такие задачи представлены в следующем виде:

Составь по схемам задачи и найди неизвестные величины (d_t – расстояние между объектами через t ч после выхода):







В основном нужно составить задачи на движение в различных направлениях согласно указанным в схемах данным.

Четвертый тип характеризуется *отсутствием сюжета и величин и наличием значений*, то есть это такие задания, в которых нужно составить задачу по числовому выражению, уравнению и т.д. В учебнике к этому типу относятся задачи вида:

- Придумай 3 задачи, решением которых является выражение:

$$(a - a : 4) : 2.$$

- Придумай ситуацию, математической моделью которой может служить данное выражение, и найди ответ (№ 424, [14]):

а) (-9) + (+4); б) (+6) + (+3);

в) (-5) + (-2); г) (-1) + (+7).

Аналогичные действия нужно выполнить в № 427 [14].

- Составь по данной математической модели задачу и реши ее:

1) $0{,}48 : (1{,}6 - 2x) + 5{,}2 = 6$ 2) $2\,(x - 1{,}8) = 2/3\,x$.

Пятому типу соответствует комбинация «-», «+», «-», где нужно составить задачу с указанными величинами, например, расстояние, скорость, время; стоимость, цена, количество и др.

- Придумай задачу, приводящую к выражению $3x + 5y$, о величинах:

1) путь, скорость, время ($S = vt$);
2) стоимость, цена, количество товара ($C = an$);
3) работа, производительность, время ($A = vt$);
4) площадь прямоугольника, его длина и ширина ($S = ab$)

- Как найти: а) процент от числа; б) число по его проценту; в) процентное отношение двух чисел? Придумай и реши задачи на эти правила. Затем эти же задачи реши методом пропорций. Какой способ ты считаешь более удобным? Почему? (См. № 766, [15]).

В учебнике [14] отдельно выделяются задания, в которых нужно составить задачу о «доходах» и «расходах» по заданному выражению.

Например,

- Придумай по выражению задачу о «доходах» и «расходах» и найди ответ (№ 220, [14]):

1) (+3) + (-7); 2) (-5) + (-8); 3) (-1) + (-4).

Авторы анализируемого учебника включили немного задач такого типа. Это можно объяснить тем, что школьники 5-6 класса еще не имеют достаточной подготовки и жизненного опыта решать задачи без числовых значений и сюжета, то есть самостоятельно придумывать задачи.

К **шестому типу** задач относятся задачи, которые характеризуются *только наличием сюжета*. Это задачи вида:

- Запиши выражение для ответа на вопрос задачи:

В 5 «А» классе а учеников, а в 5 «Б» классе – на 3 ученика меньше. Сколько всего учеников в этих двух классах?

- Составь выражение:

Барону Мюнхаузену *a* лет, а его лошадь на 25 лет моложе. Во сколько раз барон старше своей лошади?

- В одном классе *a* человек, а в другом – на 20% больше. Сколько человек в двух классах?

Говоря об обучении действию выбору точности числовых значений, соответствующих смыслу задачи, не имеется в виду формирование понятий и умений, связанных с приближенными вычислениями. Речь идет о привлечении внимания учащихся к тому, что любая математическая модель имеет погрешность. Например, считать массу краски для пола с точностью до грамма неразумно, поэтому необходимо уметь округлять числовые данные в соответствии со смыслом задачи.

Формирование данного действия должно начинаться уже в процессе знакомства учащихся с единицами измерения, что происходит еще в начальной школе. Целесообразно при изучении всех единиц рассматривать, какие объекты на практике измеряются данной единицей.

При обучении округления результата в соответствии со смыслом задачи могут использоваться задания, требующие округления, но без указания точности округления. Для того чтобы показать учащимся необходимость округления, можно использовать задачу: «Сколько нужно заплатить за половину буханки хлеба, если целая буханка стоит 6р. 75 к.?»

Приведем примеры задач, которые могут быть использованы для формирования рассматриваемого действия.

- Длина комнаты 7 м, ширина 4 м, а высота 3 м. Сколько квадратных метров обоев требуется для оклейки комнаты, если площадь окон и дверей составляет 9 м^2? Сколько рулонов обоев для этого надо купить, если в каждом рулоне 10 м^2 обоев?
- Расстояние от Москвы до Бреста равно примерно 1100 км. Изобразите шоссе от Москвы до Бреста на тетрадном листе в виде отрезка, подобрав удобный масштаб.
- В автохозяйстве для каждой модели автомобилей установлена норма износа. По «Волгам» она составляет 11,1% в год. Каков срок службы этого автомобиля?

При решении задач на практике приходится округлять не только результат, но и исходные числовые данные. Это может происходить, например, при использовании табличных данных, где указана точность более высокая, нежели требуется по смыслу задачи. Средством обучения выбору точности исходных данных могут служить задачи:

а) требующие практических измерений;

б) связанные с чтением и построением графиков;

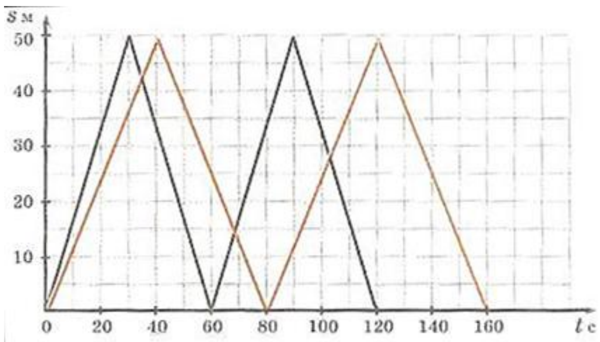
в) связанные с избыточной точностью числовых данных.

Задачи, требующие практических измерений

- Измерь длину и ширину тетради и вырази результат в дециметрах. Вычисли площадь тетрадного листа и вырази ее в квадратных дециметрах.

Задачи, связанные с чтением и построением графиков

- На тренировке в 50–метровом бассейне два пловца стартовали одновременно на дистанцию 200 м. Один плыл кролем, другой – брасом. На рисунке приведены графики их движения:



1) Сколько времени затратили пловцы на каждые 50 м и на всю дистанцию?

2) Сколько раз и на каком расстоянии от стартовой стенки бассейна встречались пловцы?

3) С какой скоростью плыл каждый из спортсменов?

4) На сколько секунд раньше финишировал первый пловец?

5) На сколько метров обогнал первый пловец второго к моменту финиша?

В основном в учебнике обучение выбору точности числовых значений реализуется при построении различных графиков зависимостей.

Задачи, которые должны использоваться при обучении *действию оценки возможности получения результата*, представлены в учебнике в небольшом количестве. К ним относятся такие задачи, как:

✓ В классе 20 учеников. Из них английский язык изучают 15 человек, немецкий – 10, и еще 1 человек изучает французский язык. Возможно ли это?

- ✓ На туристической карте масштаб оказался оторванным. Можно ли его восстановить, если известно, что расстояние от сельской почты до окраины села (по прямой дороге) равно 3,2 км, а на карте это расстояние изображено отрезком длиной 4 см?
- ✓ В городской думе 80 депутатов, среди которых 4 независимых депутата, а остальные представляют интересы трех партий. Число депутатов от первой партии на 20% больше, чем от второй, а число депутатов от второй партии составляет 62,5% числа депутатов третьей. Может ли какая-либо партия заблокировать принятие решения, для которого требуется квалифицированное большинство голосов (не менее 2/3) всех депутатов?

В процессе решения предложенных и аналогичных задач учащиеся должны усвоить, что выбор точности зависит от цели, с которой решается задача, и от качеств самого измеряемого объекта. При ответах школьники опираются на свои представления о реальных объектах и процессах, описанных в задаче.

Анализ учебников показал, что в них содержится достаточное количество задач для формирования простейших умений, входящих в метод математического моделирования. Кроме того, вводится понятие «математическая модель» и описываются этапы математического моделирования. Школьники учатся оперировать с моделями. Все это создает предпосылки для более осознанного дальнейшего обучения математике.

2.4. Опытное преподавание

Опытное преподавание осуществлялось в школе № 22 городского округа Балашиха Московской области.

Первоначально была изучена соответствующая теме исследования математическая и методическая литература. После чего были разработаны и проведены два занятия математического кружка по темам:

1) Математические модели.

2) Решение задач с применением метода математического моделирования.

Проведена контрольная работа по теме «Решение задач».

Подробное описание кружков и контрольной работы содержится соответственно в приложениях 1, 2, 3.

Нами были поставлены следующие цели:

1) познакомить учащихся с понятием математической модели;

2) рассмотреть основные типы задач, в которых требуется перевод условия задачи на математический язык;

3) выделить основные этапы моделирования;

4) в соответствии с этапами моделирования выделить этапы решения задач с помощью уравнений;

5) сравнить результаты контрольной работы в разных классах.

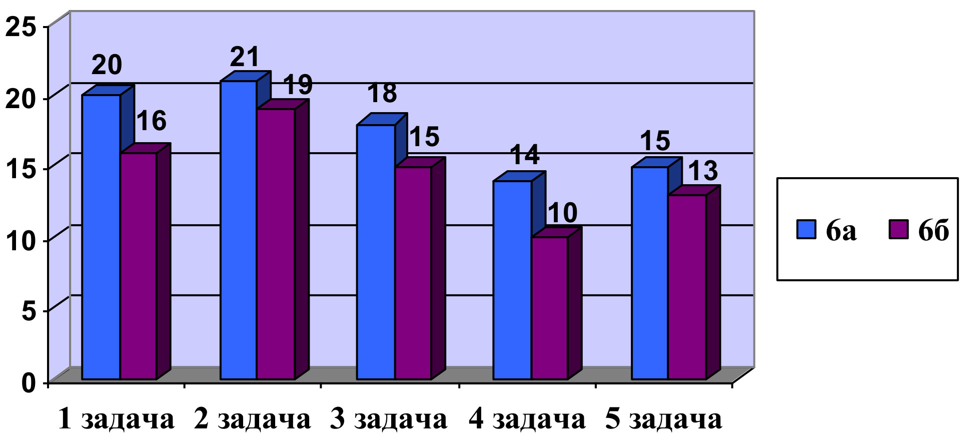
Занятия проводились в 6–х классах, обучающихся по учебнику [7] Н. Я. Виленкина, после изучения темы «Решение уравнений».

Занятия математического кружка проводились в $6^а$ классе, а контрольная работа – в $6^а$ и в $6^б$ классах.

После проведения контрольной работы были получены следующие результаты:

1) количество человек, решивших каждую задачу в $6^а$ больше, чем в $6^б$ классе (см. диаграмму);

Количество человек, решивших каждую задачу



2) при решении первой задачи трудности возникли вследствие того, что в качестве переменной *x* многие выбрали количество автомобилей, которые отремонтировал первый механик (количество детей в младшей группе – во втором варианте), хотя целесообразно за *x* взять количество автомобилей, отремонтированных вторым механиком (количество детей в средней группе). Появление дробей усложнило модель задачи, и ученики не смогли решить ее. Причем в $6^а$ правильный выбор переменной сделали на 5 человек больше, чем в $6^б$, этому способствовало составление таблицы к задаче.

3) при решении второй задачи в первом варианте были допущены ошибки при составлении математической модели, так как несколько человек получили не $80-15x=10$, а $15x-80=10$;

4) в четвертой задаче большие сложности вызвали проценты, поэтому из каждого класса эту задачу смогли решить лишь 16 и 10 человек соответственно. Ребята не смогли перевести на математический язык выражения «на 60% (40%) меньше», «на 60% (40%) больше», а также у некоторых возникла сложность с выбором переменной, так в качестве переменной была выбрана искомая величина, что нецелесообразно;

5) при составлении пропорции в пятой задаче сложностей не возникло, но многие просто не успели решить ее.

Сложности при решении задач возникают в результате того, что не всегда выбор переменных является рациональным. Уже на ранних этапах обучения нужно приучать к выбору таких переменных модели, которые оказываются наиболее удобными для решения задачи. Удачный выбор переменных помогает легче составить математическую модель задачи, и получить наиболее простую для реализации модель.

Также сложность вызывает перевод условия или части условия задачи на математический язык, результатом чего является неправильно построенная модель задачи.

Можно сделать вывод, что обучение действиям характерным для этапов моделирования, облегчает построение математической модели задачи, способствует построению более удобной и простой модели, и, как следствие, упрощается процесс решения задачи.

Заключение

В ходе теоретического и экспериментального исследования получены следующие **результаты**:

1) рассмотрены основные вопросы и выявлены проблемы обучения элементам математического моделирования;

2) рассмотрены понятия «математическая модель» и «математическое моделирование», выделены основные идеи и этапы метода математического моделирования;

3) выделены дидактические функции преподавания математического моделирования в школе;

4) обосновано значение изучения элементов математического моделирования на ранних этапах обучения, а именно в 5 – 6 классах;

5) выделены основные умения, характерные для этапов формализации и интерпретации, и описана методика обучения элементам математического моделирования в 5 -6 классах (по учебникам «Математика» для 5- 6 классов Г. В. Дорофеева, Л. Г. Петерсон);

6) проанализированы учебники по математике для 5 – 6 классов с точки зрения наличия элементов математического моделирования;

7) в процессе опытного преподавания, согласно рассмотренным методикам, были разработаны и проведены два занятия математического кружка и контрольная работа.

Результаты проведенного исследования позволяют сделать следующие **выводы:**

1) при решении задач посредством моделирования школьники учатся абстрагированию, анализу, синтезу, сравнению, аналогии, обобщению, переводу жизненных проблемных ситуаций в абстрактные модели и наоборот. Использование моделирования как способа обучения поисковой деятельности, обобщенным подходам, приемам в решении задач способствует усилению творческой направленности процесса обучения, развитию умственных способностей учащихся, то есть моделирование является средством совершенствования процесса обучения математике, которое позволяет активизировать познавательную деятельность учащихся и развивать их мышление;

2) включение моделирования в содержание уроков математики необходимо для ознакомления учащихся с современной научной трактовкой

понятий модели и моделирования, овладения моделированием как методом научного познания и решения сюжетных задач;

3) следует включить изучение элементов математического моделирования в содержание уроков не только в 7 – 9 классах, а на ранних этапах обучения, то есть уже в 5 – 6 классах или еще раньше (в начальной школе). Это обосновано тем, что у учащихся создаются предпосылки для более осознанного изучения математики, формирования диалектико-материалистического стиля мышления и повышения интереса к самой науке математике.

Можно сделать общий вывод, что все задачи исследования решены, цель достигнута.

Библиографический список

1. Алгебра: Учебник для 9 кл. сред. шк. [Текст] / Ю. Н. Макарычев, Н. Г. Миндюк, К. И. Нешков, С. Б. Суворова; Под ред. С. А. Теляковского. – М.: Просвещение, 2007. -272 с.

2. Алгебра и начала анализа. Учебник для 10 – 11 кл. сред. шк. [Текст] / А. Н. Колмогоров, А. М. Абрамов, Ю. П. Дудницын и др.: Под. Ред. А. Н. Колмогорова. – 2-е изд. – М.: Просвещение, 2007. – 320 с.

3. Алтухов, В.Л. О перестройке мышления: философско-методологические аспекты [Текст] / В. Л. Алтухов, В.Ф. Шапошников. – М.: Просвещение, 1999.

4. Артоболевский, А. Н. Арифметические задачи с производственно-бытовым содержанием [Текст] / А. Н. Артоболевский. – М.: Просвещение, 2000.

5. Веников, В.А. Теория подобия и моделирования [Текст] / В. А. Веников. – М.: Высшая школа, 1995. – 480 с.

6. Виленкин Н. Я. Математика, 5 класс. Учебник для 5 кл. общеобразовательных учреждений [Текст] / Н. Я. Виленкин, В. И. Жохов, А. С. Чесноков, С. И. Шварцбург. / Изд. 6-е. - М.: Сайтком, 2008. - 358 с.

7. Виленкин Н. Я. Математика, 6 класс. Учебник для 6 кл. общеобразовательных учреждений [Текст] / Н. Я. Виленкин, В. И. Жохов, А. С. Чесноков, С. И. Шварцбург. / 12-е изд., стереотип. – М.: Мнемозина, 2008. - 304 с.

8. Возняк, Г. М. Прикладные задачи в мотивации обучения [Текст]/ Г. М. Возняк // Математика в школе, 2002, №2

9. Горстко, А. Б. Познакомьтесь с математическим моделированием [Текст] / А. Б. Горстко. – М.: Знание, 2002. – 160 с.

10. Грес, П. В. Математика для гуманитариев [Текст] / П. В. Грес. – М.: Логос, 2005.

11. Дорофеев, Г. В. Математика, 5 класс. Часть 1: учебник для 5 кл. [Текст] / Г. В. Дорофеев, Л. Г. Петерсон. – М.: Баллас, С-инфо, 2002. – 176 с.

12. Дорофеев, Г. В. Математика, 5 класс. Часть 2: учебник для 5 кл. [Текст] / Г. В. Дорофеев, Л. Г. Петерсон. – М.: Баллас, С-инфо, 2008. – 240 с.

13. Дорофеев, Г. В. Математика, 6 класс. Часть 1: учебник для 6 кл. [Текст] / Г. В. Дорофеев, Л. Г. Петерсон. – М.: Баласс, С-инфо, 2008. – 112 с.

14. Дорофеев, Г. В. Математика, 6 класс. Часть 2: учебник для 5 кл. [Текст] / Г. В. Дорофеев, Л. Г. Петерсон. – М.: Баллас, С-инфо, 2008. – 128 с.

15. Дорофеев, Г. В. Математика, 6 класс. Часть 3: учебник для 6 кл. [Текст] / Г. В. Дорофеев, Л. Г. Петерсон. – М.: Баласс, С-инфо, 2008. – 176 с.

16. Зубарева, И. И. Математика. 5 кл.: Учебник для общеобразоват. Учреждений [Текст] / И. И. Зубарева, А. Г. Мордкович. – 2-е изд. – М.: Мнемозина, 2008. – 293 с.

17. Зубарева, И. И. Математика. 6 кл.: Учебник для общеобразоват. Учреждений [Текст] / И. И. Зубарева, А. Г. Мордкович. – 2-е изд. – М.: Мнемозина, 2008. – 281 с.

18. Канин, Е. С. Учебные математические задачи [Текст] / Е.С. Канин. – Киров: Изд-во ВятГГУ, 2004. – 154 с.

19. Крутихина, М. В. Обучение некоторым элементам математического моделирования как средство подготовки к профильному образованию [Текст] / М. В. Крутихина // Математический вестник педвузов и университетов Волго-Вятского региона. Периодический межвузовский сборник научно-методических работ: выпуск 6 – Киров: Изд-во ВятГГУ, 2004. – с. 246-254.

20. Мангейм, Дж. Б. Политология. Методы исследования [Текст]: Перевод с англ. / Дж. Б. Мангейм, Р. К. Рич. – М.: Весь Мир, 2008. – 544 с.

21. Математика: Учебник для 5 кл. общеобразоват. учреждений [Текст] / Г. В. Дорофеев, И. Ф. Шарыгин, С. Б. Суворова и др.; Под ред. Г. В. Дорофеева, И. Ф. Шарыгина. – 2-е изд. – М.: Просвещение, 2008. – 368 с.

22. Математика: 6 класс: Учебник для общеобразоват. учеб. заведений [Текст] / Г. В. Дорофеев, И. Ф. Шарыгин, С. Б. Суворова и др.; Под ред. Г. В. Дорофеева, И. Ф. Шарыгина. – 2-е изд. – М.: Дрофа, 2008. – 416 с.

23. Математическая энциклопедия. Гл. ред. М. Виноградов. Том 3. Коо - Од. М.: Советская энциклопедия, 2000, 1184 стр., ил.

24. Мышкис, А. Д. О прикладной направленности школьного курса элементов математического анализа [Текст] / А. Д. Мышкис // Математика в школе, 1990, - № 6, с. 7-11.

25. Новик, И. Б. О философских вопросах кибернетического моделирования [Текст] / И. Б. Новик – М., Знание, 1964.

26. Обойщикова, И. Г. Обучение моделированию учащихся 5 – 6 классов при изучении математики [Текст]: Автореферат диссертации на соискание ученой степени кандидата педагогических наук / И. Г. Обойщикова. - Саранск, 2005.

27. Попов, Н. Фундаментализация подготовки специалистов-математиков в условиях университетского образования/Н. Попов //Высшее образование в России.-2008.

28. Саранцев, Г. И. Методика обучения математике в средней школе: Учеб. пособие для студентов мат. спец. пед. вузов и ун-тов / Г. И. Саранцев. - М.: Просвещение, 2002.

29. Сидорук, Г. Н. О формировании познавательной активности у детей дошкольного возраста/Г. Н. Сидорук //Педагогическое образование и наука.-2006

30. Сидоров, С. Технология устранения педагогических ошибок/С. Сидоров //Воспитательная работа в школе.-2005.

31. Сидорова, В. В. Психолого-педагогические аспекты современных технологий обучения/В. В. Сидорова //Инновации в образовании.-2008.

32. Сидоренков, А. В. Групповая сплоченность и неформальнче подгруппы/А. В. Сидоренков //Психологический журнал.-2006.

33. Сизова, Е. Моделирование в структуре учебной деятельности/Е. Сизова //Высшее образование в России.-2007.

34. Сичивица, О. М. Методы и формы научного познания [Текст] / О. М. Сичивица. – М., Высшая школа, 1993.

35. Темербекова А.А. Методика преподавания математики: Учебное пособие для студ. высш. учеб. заведений.- М.: Гуманит. изд. центр ВЛАДОС, 2003.

36. Терешин, Н. А. Прикладная направленность школьного курса математики [Текст] / Н. А. Терешин. – М.: Просвещение, 1990.

37. Технологии разработки учебно-тематического плана программ дополнительного образования //Дополнительное образование.-2003.-№11.

38. Уемов, А. И. Логические основы метода моделирования [Текст] / А. И. Уемов. – М.: Просвещение, 1996.

39. Формирование системного мышления в обучении: учеб. пособие для вузов [Текст] / под ред. З. А. Решетовой – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2002. – 344с.

40. Фридман, Л. М. Наглядность и моделирование в обучении [Текст] / Л. М. Фридман. – М.: Знание, 1984. – 80 с.

41. Целищева, И. Моделирование в текстовых задачах [Текст] / И. Целищева, С. Зайцева // Приложение к газете «1 сентября». Математика, 2002, №33 – 34

42. Шендяпин, В. М. Математическое моделирование уверенности при принятии решения в сенсорных задачах/В. М. Шендяпин [и др.] //Психологический журнал.-2008.

43. Чудинова, Елена Васильевна. Особенности моделирования в учебной деятельности подростка/Е. В. Чудинова //Вопросы психологии.-2005.

44. Федорова, М. А. Роль информационных технологий в ориентировочно-исследовательской деятельности обучаемых/М. А. Федорова //Инновации в образовании.-2008.

45. Уваров, Александр. Моделирование процесса информатизации школы/А. Уваров, Г. Водопьян //Школьные технологии.-2007.

Приложение 1

Разработка занятия математического кружка по теме «Математические модели»

<u>Ход занятия:</u>

Учитель предлагает ребятам решить 2 задачи по вариантам.

Задача 1. На выставке кошек представлены кошки сибирской, ангорской, персидской и сиамской пород. Сибирских кошек на 3 больше, чем сиамских, персидских на одну меньше, чем ангорских, ангорских в 4 раза больше, чем сиамских. Сколько кошек каждой породы на выставке, если всего их 32.

Задача 2. На вопрос учеников о прошедшей контрольной работе учитель ответил: «Пятерок на 3 больше, чем двоек, троек на одну меньше, чем четверок, а четверок в 4 раза больше, чем двоек». Сколько человек получили пятерки и сколько четверки, если в классе 32 человека? (см. № 39, [12])

Затем учитель просит по одному человеку от каждого варианта записать на доске уравнение, получившееся в результате решения задачи. Оказалось, что уравнения совпадают.

Учитель говорит: «Мы видим, что в совершенно различных, на первый взгляд, задачах можно обнаружить, что их решение практически одинаково. В этих двух непохожих ситуациях мы использовали одну и ту же **математическую модель**. Полученное вами уравнение – это и есть математическая модель задачи. Ребята, а знакомы ли вы вообще с понятием «модель»? Можете ли вы привести примеры известных вам моделей (называют модели)».

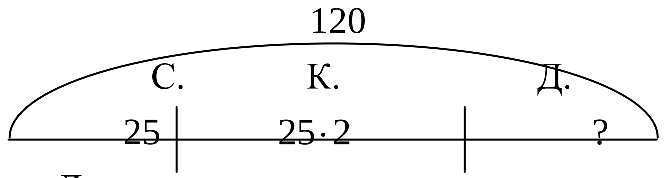
Можно в качестве примера привести такие модели: глобус – модель земного шара, перед тем, как построить дом, архитектор создает его уменьшенную копию – модель и т.п. Было сказано, что полученное уравнение – это математическая модель задачи, тогда в чем состоит отличие математической модели от других моделей. Математическая модель описывается средствами математики, то есть с помощью математических знаков и символов и представляет собой математическое выражение или равенство, например:

$(38+422)\cdot 26$; $c-(a-b)$; $x+34=76$.

Для того чтобы построить математическую модель, надо, прежде всего, научиться переводить условия задач с привычного родного языка на специальный, математический язык.

Рассмотрим несколько задач с примерами такого перевода.

Задача 1. Сережа, Костя и Денис принесли на выставку 120 почтовых марок. Сережа принес 25 марок, а Костя – в 2 раза больше марок, чем Сережа. Сколько марок принес на выставку Денис.

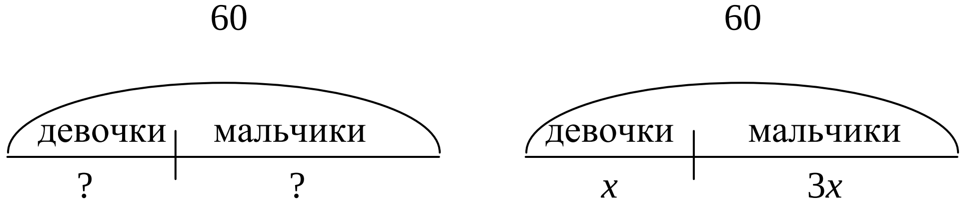


Марки Дениса составляют часть всех марок, которые принесли мальчики. Поэтому для ответа на вопрос задачи надо из всех марок вычесть марки Сережи и Кости. Из условия известно, что все трое ребят принесли 120 марок. Сережа принес 25 марок, а Костя - $25\cdot 2$ марок. Значит, Денис принес $120-25-25\cdot 2$ марок.

Выражение $120-25-25\cdot 2$ является математической моделью данной задачи.

Задача 2. В соревнованиях по плаванию приняло участие 60 человек, причем мальчиков было в 3 раза больше, чем девочек. Сколько мальчиков и сколько девочек участвовало в соревнованиях.

Всех участников соревнований можно разбить на 2 группы – мальчики и девочки. Однако для этой задачи мы не можем составить числовое выражение, так как не известно ни число мальчиков, ни число девочек



Обозначим число девочек через x. Тогда число мальчиков равно $3x$, а всего участников соревнований $x+3x$. Но по условию задачи всего участников 60, и значит, равенство $x+3x=60$ является математической моделью данной задачи.

Мы перевели условия задачи на математический язык, но не решили их, то есть не ответили на поставленный вопросы. Как же найти неизвестные числа?

После перевода получились новые тексты задач.

Решение первой задачи свелось к нахождению значения выражения $120-25-25\cdot 2$, что не вызывает никаких трудностей.

$$120-25-25\cdot 2=120-25-50=45$$

Таким образом, ответ к первой задаче следующий: «Денис принес на выставку 45 марок».

Во второй задаче необходимо найти неизвестные числа x и $3x$, если выполняется равенство $x+3x=60$.

Равенство, содержащее переменную, называется уравнением. С уравнениями вы уже знакомы и умеете их решать.

$x+3x=4x$, тогда $4x=60$.

$x=60:4$,

$x=15$.

Значит, в соревнованиях участвовало 15 девочек. А число мальчиков, участвовавших в соревнованиях, равно $3x$ или 45.

Из рассмотренных примеров видно, что после перевода текста задачи на математический язык поиск решения сводится к **работе с математическими моделями** – к вычислениям, преобразованиям, рассуждениям.

Далее ученикам предлагается выполнить следующие задания.

Задание 1. Переведите условие задачи с русского языка на математический двумя различными способами:

Тетради в клетку дороже тетрадей в линейку на 400 руб. За 8 тетрадей в клетку надо заплатить на 1600 руб. больше, чем за 10 тетрадей в линейку. Какова цена этих тетрадей? (См. № 116 (3), [11])

Задание 2. Построй математическую модель задачи и реши ее.

Из двух городов, расстояние между которыми 294 км, одновременно навстречу друг другу выехали два мотоциклиста. Через 1 ч 40 мин расстояние между ними стало равно 24 км. Скорость первого мотоциклиста составляет 80% скорости второго. С какой скоростью они ехали? (См. № 201 (1), [13])

Задание 3. Предприятию было выделено для сотрудников 120 садовых участков. Из них 25% участков еще не освоено, а на освоенных участках построены деревянные и кирпичные дома. Сколько построено кирпичных домов, если их число составляет 20% от числа деревянных домов? (См. № 414, [13])

В школе в качестве моделей изучаются не только числовые или буквенные выражения и уравнения. В старших классах вы познакомитесь с другими видами уравнений, неравенствами, системами уравнений или неравенств, а также с функциями.

Приложение 2

Разработка занятия математического кружка по теме «Решение задач с применением метода математического моделирования»

<u>Ход занятия:</u>

Распространенным видом математических моделей являются уравнения. На этом занятии мы будем учиться решать задачи с помощью уравнений. Но прежде чем ответить на вопрос, как решать задачи, попытаемся разобраться, для чего их решать.

Задачи в истории возникли как инструмент тренировки ума. Ситуации, описанные в задачах, иногда кажутся надуманными. Но для составителя это не важно, так как он не повторяет реальную ситуацию, а конструирует ее, сохраняя связи между величинами в реальных процессах. Таким образом, решая задачи, мы учимся строить математические модели реальных ситуаций.

Математическое моделирование включает в себя три этапа:

1) построение модели (перевод условия задачи на математический язык);
2) работу с моделью;
3) практический вывод.

В соответствии с этим и решение задач с помощью уравнений состоит из трех этапов:

1) составление уравнения;
2) решение уравнения;
3) ответ на вопрос задачи.

Составление уравнение начинается с выбора неизвестной величины, которую обозначают буквой x (или любой другой буквой). Для этого прежде всего надо определить, о каких величинах идет речь в задаче, какая между ними взаимосвязь, какие из величин известны, а какие нет.

Обычно за x принимают искомую величину, однако это совсем не обязательно. Лучше обозначать величины так, чтобы получилось более простое и удобное для решения уравнение.

Есть еще один важный момент, на который нужно обращать внимание при составлении уравнения – это соответствие единиц измерения величин. Если, например, скорость движения выражена в километрах в час, а время в минутах, то необходимо или время выразить в часах, или скорость – в километрах в минуту.

Решая задачу с помощью уравнения, надо помнить о том, что не всегда корни уравнения представляют собой искомые величины. Поэтому перед тем, как записать ответ, надо сопоставить введенные обозначения с вопросом задачи.

Кроме того, ответ должен соответствовать реальности. Например, если получилось, что в классе 25,8 учащихся, то либо задача составлена не корректно, либо в решении допущена ошибка.

Итак, при решении задач с помощью уравнений можно руководствоваться следующим алгоритмом:

1) Внимательно прочитать задачу.
2) Определить, какие величины известны, а какие – нет.
3) Проверить соответствие единиц измерения величин.
4) Одну из неизвестных величин обозначить буквой x (или любой другой буквой).
5) Выразить через x значения других неизвестных величин, используя при необходимости таблицы и схемы.
6) Составить уравнение.
7) Соотнести корень уравнения с вопросом задачи.
8) Проверить соответствие полученного ответа реальному процессу.

Приведем пример решения задачи с помощью уравнений.

Задача. В первой бочке было в 2 раза меньше огурцов, чем во втором. После того как из первой бочки взяли 500 г огурцов, а из второй – 6 кг, во второй бочке осталось на 60% огурцов больше, чем в первой. Сколько огурцов было во второй бочке первоначально?

1 этап. Прежде всего, заметим, что масса огурцов выражена в разных единицах.

Переведем граммы в килограммы: 500 г = 0,5 кг.

В задаче требуется найти исходную массу огурцов во второй бочке. Но за x удобнее принять исходную массу огурцов в первой бочке, так как она меньше и у нас не появится дробей.

Для того чтобы составить уравнение, заполним таблицу.

	Масса огурцов в 1 бочке	Масса огурцов во 2 бочке
Было	x кг	$2x$ кг
Стало	$(x – 0,5)$ кг	$(2x – 6)$ кг

Заметим, что, составляя таблицу, делая к задаче рисунок или чертеж, мы также составляем математическую модель данной задачи, которая называется графической, что во многих случаях позволяет нам облегчить решение задачи.

Решение:

1) 100% + 60% = 160% - составляет масса огурцов, оставшихся во второй бочке от массы огурцов, оставшихся в первой бочке.

2) Пусть в первой бочке было x кг огурцов, тогда во второй бочке было $2x$ кг огурцов. В первой бочке осталось $(x – 0,5)$ кг, а во второй – $(2x – 6)$ кг огурцов. Масса огурцов, оставшихся в первой бочке, составляет 160% от массы огурцов, оставшихся во второй бочке, значит:

$$2x-6=1{,}6(x-0{,}5)$$

2 этап.

$$2x-6=1{,}6x-0{,}8$$

$$0{,}4x=5{,}2$$

$$x=13$$

3) $13\cdot 2=26$ (кг)

3 этап. Ответ: во второй бочке было 26 кг огурцов.

Далее ученикам предлагается решить следующие задачи и сделать к ним рисунок:

Задача 1. Из коробки взяли сначала 4 конфеты, а потом еще четверть оставшихся конфет. После этого в коробке осталось $\frac{2}{3}$ всех конфет. Сколько конфет осталось в коробке? (См. № 118, [15])

Задача 2. Грузовик проехал в первый день треть всего пути, а во второй день – 90% пути, пройденного в первый день, а за третий день – остальные 440 км. Сколько километров проехал грузовик за второй день? (См. № 117 (а), [15])

Задача 3. На двух элеваторах зерна было поровну. Когда из первого элеватора вывезли 140 т зерна, а из второго в 2,5 раза больше, во втором элеваторе зерна осталось в 2,4 раза меньше, чем в первом. Сколько тонн зерна было на элеваторах первоначально? (См. № 150, [15])

Задача 4. Мастер может выполнить весь заказ за 8 ч, а его ученик - за 10 ч. В час ученик делает на 15 деталей меньше мастера. Найди производительность мастера и производительность ученика (см. № 116 (а), [15])

Приложение 3

Контрольная работа по теме «Модель»

Вариант 1.

Задача 1. На станции технического обслуживания три механика отремонтировали за месяц 78 автомобилей. Первый механик отремонтировал в 1,5 раза больше автомобилей, чем второй, а третий – на 6 автомобилей больше, чем первый. Сколько автомобилей отремонтировал каждый механик? (См. № 137 (1), [13])

Задача 2. Таня задумала число, умножила его на 15 и результат вычла из 80. Получила 10. Какое число задумала Таня? (См. № 1212 (б), [22])

Задача 3. Собственная скорость теплохода равна 32,5 км/ч, а его скорость по течению реки – 35 км/ч. Какое расстояние проплывет теплоход, если будет двигаться 2,6 ч по течению реки и 0,8 ч против течения? (См. № 225 (1), [13])

Задача 4. Трем братьям вместе 45 лет. Возраст младшего на 60% меньше возраста среднего брата, а возраст старшего брата – на 60% больше возраста среднего. Сколько лет младшему брату? (См. № 126 (а), [15])

Задача 5. Реши, составив пропорцию.

На конвейерной линии расфасовывается 5,4 кг сухого картофеля за 2,5 мин. Сколько килограммов сухого картофеля будет расфасовано на этой линии за один час? (См. № 293 (1), [14])

Вариант 2.

Задача 1. В детском хоре «Весна» занимаются148 детей. В младшей группе хора в 2 раза больше детей, чем в средней, и на 32 человека больше, чем в старшей. Сколько детей занимается в каждой группе хора? (См. № 130 (1), [13])

Задача 2. Саша задумал число, прибавил к нему 25 и результат умножил на 10. Получил 200. Какое число задумал Саша? (См. № 1212 (в), [22])

Задача 3. Собственная скорость катера равна 14,7 км/ч, а скорость против течения реки – 10,2 км/ч. Какое расстояние преодолеет катер, плывя 2 ч по течению реки и 4,5 ч против течения? (См. № 225 (2), [13])

Задача 4. В библиотеке 270 книг. Книг на английском языке на 40% больше, чем на французском, а книг на немецком – на 40% меньше, чем на французском. Сколько в библиотеке книг на английском языке?

Задача 5. Реши, составив пропорцию.

Оператор набрал на компьютере рукопись за 6,3 ч, работая с производительностью 16 стр./ч. За сколько времени набрал бы эту рукопись другой оператор, производительность которого 21 стр./ч? (См. № 293 (2), [14]).

Оглавление